UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 16.01.2012, vor der Vorlesung

Aufgabe 17 (2+2=4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $\varphi(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist $u : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch, so gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi(re^{it}))\, dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it})\, dt \quad (0 \leq r < 1).$$

(*Hinweis: Beweis von Satz 5.15.*)

(b) Ist $f \in H^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, so ist auch $f \circ \varphi \in H^p$ und $\|f \circ \varphi\|_p \leq \|f\|_p$.

Aufgabe 18 (2+2+1+1+1=7 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ nullstellenfrei mit $\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})|\, dt < \infty$. Zeigen Sie nacheinander:

(a) Es ist $\sup_{0\leq r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |f(re^{it})|\, dt < \infty$. Benutzen Sie dabei die Mittelwerteigenschaft der Funktion $\log |f|$.

(b) Es gibt ein reelles Maß $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\log |f| = P[\mu]$.

(c) Die Funktionen

$$h_\pm : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad h_\pm(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu_\pm(\zeta)$$

sind analytisch mit $\operatorname{Re} h_\pm \geq 0$ auf $\mathbb{D}$.

(d) $G = e^{-h_-}$, $H = e^{-h_+}$ sind Funktionen in H^∞ mit $|\frac{G}{H}| = |f|$.

(e) Es gibt Funktionen $g, h \in H^\infty$ mit $f = \frac{g}{h}$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Sei $f(z) = \exp(\frac{z+1}{z-1})$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph ist mit

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{it})|\, dt < \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{it})|\, dt.$$

(bitte wenden)

Es sei

$$\ell^2 = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

der Hilbertraum aller quadratsummierbaren komplexen Zahlenfolgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Aufgabe 20 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie:

(a) $\|f_r\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ für $0 \leq r < 1$.

(b) $f \in H^2 \Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$.

(c) Die Abbildung

$$\Phi : H^2 \to \ell^2, \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \mapsto (c_n)_{n\geq 0}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre