UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 30.01.2012, vor der Vorlesung

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r \uparrow 1} \int_{\mathbb{T}} |\log |f_r|| \, d\lambda = 0$$

genau dann gilt, wenn ein Blaschke-Produkt B und eine reelle Zahl θ existieren mit $f = e^{i\theta} B$. (*Hinweis: Wählen Sie in $\Rightarrow$ eine Zerlegung $f = Bg$ mit einem Blaschke-Produkt B und einer nullstellenfreien Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ und zeigen sie, dass $|g| \equiv 1$.*)

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie, dass genau dann $f \in N$ gilt, wenn $g, h \in H^\infty$ existieren mit $0 \notin h(\mathbb{D})$ und $f = \frac{g}{h}$. (*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 18 für $\Rightarrow$.*)

Aufgabe 23 (2+2=4 Punkte)

Sei $f \in N \setminus \{0\}$. Benutzen Sie Aufgabe 22, um zu zeigen, dass eine Funktion $f^* : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ existiert mit

(i) $\lim_{r \uparrow 1} f(rz) = f^*(z)$ für λ-fast alle $z \in \mathbb{T}$ und

(ii) $\log |f^*| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

Aufgabe 24 (1+1+2+2=6 Punkte)

Seien $f \in H^p$ $(1 < p \leq \infty)$ und $f^* \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ mit $\lim_{r \uparrow 1} f(rz) = f^*(z)$ für λ-fast alle $z \in \mathbb{T}$. Zeigen Sie:

(a) $f = P[f^*]$,

(b) Für $p < \infty$ ist $f^* = \lim_{r \uparrow 1} f_r$ in $L^p(\mathbb{T})$, für $p = \infty$ ist $f^* = w^*\text{-}\lim_{r \uparrow 1} f_r$ in $L^\infty(\mathbb{T})$ bezüglich $\langle L^1(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}) \rangle$.

(c) $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

(d) $\widehat{(f^*)}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$. (*Hinweis: Benutzen Sie (b) und die Cauchysche Integralformel.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre