§ 10 Supremum, Infimum und Mächtigkeit von Mengen

Man kann zeigen, dass das Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ (§7) äquivalent ist zu der folgenden Eigenschaft von $\mathbb{R}$:

Jede nach oben beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Wir zeigen nur eine Implikation:

10.1 Satz Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.

$\Rightarrow$ Es gibt eine (eindeutige!) Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit

(i) s ist obere Schranke von M,

(ii) t ist obere Schranke von $M \Rightarrow t \geq s$

(d.h. mit $s = \sup M$, siehe Def. 5.10(d))

__Beweis__: Sei $a_1 \in M$ und sei b_1 eine obere Schranke von M. Setze

$$I_1 = [a_1, b_1].$$

Wähle rekursiv abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ so, dass $\forall k \geq 1$ gilt

$$I_{k+1} \subset I_k, \quad \text{Länge}(I_{k+1}) = \tfrac{1}{2}\,\text{Länge}(I_k),$$

$$b_k \text{ ist obere Schranke von } M, \quad M \cap [a_k, b_k] \neq \emptyset.$$

Seien $I_1, \dots, I_k$ gewählt.

Falls $\frac{a_k+b_k}{2}$ obere Schranke von M ist, wähle $I_{k+1} = [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$,

sonst setze $I_{k+1} := [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 7.13) existiert der Grenzwert

$$s = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k \in \bigcap_{k\geq 1} I_k.$$

Ist $x \in M$, so ist $x \leq b_k \ \forall k \geq 1$, also nach Aufgabe 23(ii) auch $x \leq \lim_{k\to\infty} b_k = s$.

Wegen $s = \lim_{k\to\infty} a_k$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_k > s - \varepsilon$$

und wegen $M \cap [a_k, b_k] \neq \emptyset$ auch ein $x \in M$ mit $x > s - \varepsilon$. Also ist s obere Schranke von M, und jede andere obere Schranke von M ist $\geq s$. ◪

10.2 Bemerkung (a) Analog zeigt man, dass jede nach unten beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes Infimum (= größte untere Schranke) besitzt.

(b) Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist

$$R = \sup\{|x|;\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergent}\}$$

der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (vgl. Korollar 9.4). Dies folgt direkt aus Satz 9.3 und der Definition des Supremums.

Mächtigkeit von Mengen

10.3 Definition Eine (beliebige) Menge M heißt <u>abzählbar</u>, falls es eine surjektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \to M$ gibt ($\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$).

10.4 Beispiele

(1) Endliche Mengen sind abzählbar.

(2) $\mathbb{N}$ ist abzählbar (Wähle $\varphi = id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

(3) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar (Definiere $x_{2n} = n$ für $n \geq 0$ und $x_{2n-1} = -n$ für $n \geq 1$)

(4) $\mathbb{N}^2$ ist abzählbar. Definiere eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gemäß

$$\begin{array}{cccc}
00 \rightarrow & 01 & 02 & 03 \ \ldots \\
10 & 11 & 12 & 13 \ \ldots \\
20 & 21 & 22 & 23 \ \ldots \\
30 & 31 & 32 & 33 \ \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

(5) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen M_n ($n \in \mathbb{N}$) ist abzählbar:

Schreibe M_n in der Form: $M_n = \{x_{nm};\ m \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ Die Abbildung $\varphi: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, $(j,k) \mapsto x_{jk}$ ist surjektiv.

(6) $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \{ \frac{p}{q} ;\ p \in \{-n, \dots, n\} \text{ und } q \in \{1, \dots, n\} \}$

ist abzählbar nach (5).

10.5 <u>Satz</u> $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

<u>Beweis</u>: Genügt z.z., dass $]0,1[$ nicht abzählbar ist.

Sonst gäbe es eine "Abzählung" $\{x_n ;\ n \geq 1\} =]0,1[$. Sei

$$x_n = 0{,}x_{n1} x_{n2} \dots$$

die Dezimalbruchentwicklung (Satz 8.6) von x_n. Definiere

$$c = 0{,}c_1 c_2 \dots \in]0,1[$$

durch

$$c_k = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_{kk} \neq 1 \\ 2, & \text{falls } x_{kk} = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, mit $x_n = c$

(*) $\Rightarrow$ $c_n = x_{nn}$. Dies ist nicht möglich. Also ist $]0,1[$ nicht abzählbar.

Wir beweisen die Implikation (*) indirekt:

Wäre $c_n \neq x_{nn}$, so wäre

$$N := \min\{k \geq 1 ;\ c_k \neq x_{nk}\} \leq n$$

die minimale natürliche Zahl mit $c_N \neq x_{nN}$.

Wäre $c_N < x_{nN}$, so würde folgen

$$\sum_{k=N}^{\infty} c_k 10^{-k} < c_N 10^{-N} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k}_{= 9 \left(\frac{1}{10}\right)^{N+1} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-N}}$$

$$= (c_N + 1) 10^{-N} \leq \sum_{k=N}^{\infty} x_{nk} 10^{-k}$$

$\Rightarrow$ $c < x_n$ #

Wäre $c_N > x_{nN}$, so würde folgen

$$\sum_{k=N}^{\infty} x_{nk} 10^{-k} \leq x_{nN} 10^{-N} + 10^{-N} \leq c_N 10^{-N} < \sum_{k=N}^{\infty} c_k 10^{-k}$$

$\Rightarrow$ $x_n < c$ #. ▨

10.6 **Korollar** (a) Jedes Intervall positiver Länge in $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (:= nicht abzählbar)

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.

Beweis: (a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es eine bijektive Abbildung

$$\varphi :]a,b[\longrightarrow]0,1[.$$

(b) Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar, so wäre auch

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

abzählbar als Vereinigung zweier abzählbarer Mengen (10.4 (5)).