§ 11 Stetigkeit

Stetige Funktionen sind Konvergenz-erhaltende Funktionen

11.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f

(a) stetig in $a \in D$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

(b) stetig, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist

Für $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ schreibt man

$$\lim_{x \to a} f(x) = c,$$

wenn es eine Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt und wenn für jede solche Folge gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

Beachte: f ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow a \in D$ und $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

11.2 Satz (ε-δ-Kriterium)

f ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \;\; \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei f stetig in $a \in D$

A: Die rechte Seite ist falsch.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ so, dass $\forall\, \delta > 0$, insbesondere zu $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ $\exists\, x_n \in D$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ aber } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad (x_n) \xrightarrow{n} a$ in D, aber $(f(x_n)) \not\to f(a)$ #

"$\Leftarrow$" Es gelte die rechte Seite. Sei $D \ni x_n \xrightarrow{n} a \in D$ und sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$

$\Rightarrow$ zu δ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $\forall n \geq n_0$ gilt $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. $\boxtimes$

11.3 Beispiele

(1) $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist stetig, denn

$$(x_n) \xrightarrow{n} a \Rightarrow id(x_n) = (x_n) \xrightarrow{n} a = id(a)$$

(2) Konstante Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest) sind stetig, denn

$$(x_n) \xrightarrow{n} a \Rightarrow f(x_n) = c \xrightarrow{n} c = f(a)$$

(3) Die Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig, denn

$$(x_n) \xrightarrow{n} a \Rightarrow \big|\, |x_n| - |a| \,\big| \overset{5.6(c)}{\leq} |x_n - a| \xrightarrow{n} 0$$

mit $-y$ statt y

(4) Polynomfunktionen $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ sind stetig.

Dies folgt aus (1) und (2) zusammen mit dem nächsten Satz

11.4 Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sind $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$, so sind

$f + g: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$, $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ und,

wenn $g(a) \neq 0$ ist, auch

$$\frac{f}{g}: D' := \{x \in D;\ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in a.

Beweis: Dies folgt direkt aus Def. 11.1 und den Grenzwertsätzen (7.7).
Ist etwa (x_n) eine Folge in D mit $(x_n) \xrightarrow{n} a$, so folgt

$$(f(x_n)) \xrightarrow{n} f(a) \quad \text{und} \quad (g(x_n)) \xrightarrow{n} g(a),$$

also auch

$$(f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \xrightarrow{n} f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a). \quad \boxtimes$$

11.5 Beispiel Rationale Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (p, q Polynomfunktionen) sind stetig auf $D = \{x \in \mathbb{R};\ q(x) \neq 0\}$.

11.6 Satz (Komposition stetiger Funktionen)
Sind $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(D) \subset E$, so ist auch

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

stetig.

Beweis: Aus $D \ni x_n \xrightarrow{n} a$ folgt $E \ni f(x_n) \xrightarrow{n} f(a)$, da f stetig ist, und dann $g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow{n} g(f(a)) = g \circ f(a)$, da g stetig ist. $\boxtimes$

In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ keine Lösung. Sonst gäbe es $p, q \in \mathbb{Z}$, die nicht beide gerade sind, mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ p^2 und damit auch p ist gerade

$\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $p^2 = 4n$

$\Rightarrow$ $q^2 = \frac{p^2}{2} = 2n$ und q sind gerade #

Sei allgemeiner $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Mit dem nächsten Satz kann man sehr einfach zeigen, dass die Gleichung

$$x^n = c$$

eine (eindeutige!) Lösung $x \in \mathbb{R}_{>0}$ besitzt.

11.7 Satz (Zwischenwertsatz) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei

$$f(a) < y < f(b)$$

Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.

Beweis: Sei $f(a) < y < f(b)$.

Ist $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq y$, setze $a_1 := \frac{a+b}{2}$, $b_1 := b$.

Ist $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > y$, setze $a_1 := a$, $b_1 := \frac{a+b}{2}$.

In jedem Fall ist $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$.

Fortsetzen dieses Verfahrens führt zu Folgen (a_k), (b_k) in $[a,b]$ mit

$$f(a_k) \leq y \leq f(b_k) \quad \forall k \geq 1,$$

für die nach dem Intervallschachtelungsprinzip (7.13) der gemeinsame Grenzwert

$$x = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

existiert. Dann liegt $x \in [a,b]$ (Aufgabe 23 (ii)) und

$$y \leq \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \leq y.$$

Also ist $y = f(x)$.

$\boxtimes$

Genauso folgt, dass für eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > y > f(b)$ ein $x \in [a,b]$ existiert mit $f(x) = y$.

11.8 Korollar Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$x^n = c$$

Man schreibt $c^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{c}$ für dieses x.

Beweis: Eindeutigkeit: Für $0 < x < y$ ist $x^n < y^n$ (Aufgabe 18 (b))

Existenz: Wegen $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n = 0$ gibt es ein $k > c$ mit $\left(\frac{1}{k}\right)^n < c$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{k}\right)^n < c < k^n$$

Nach dem ZWS (11.7) angewendet auf $f: [\frac{1}{k}, k] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ gibt es ein $x \in [\frac{1}{k}, k]$ mit $x^n = f(x) = c$.

$\boxtimes$

11.9 Satz Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren

$$\min\{f(x);\ x \in [a,b]\} \quad \text{und} \quad \max\{f(x);\ x \in [a,b]\},$$

das heißt es gibt $x_0, y_0 \in [a,b]$ mit

$$f(y_0) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b].$$

Insbesondere ist f beschränkt ($:\Longleftrightarrow f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt)

Nach dem ZWS (11.7) gilt für x_0, y_0 wie oben sogar

$$f([a,b]) = [f(y_0), f(x_0)].$$

Beweis: Setze $s = \sup f([a,b]) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Wähle reelle Zahlen $s_n < s$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

$\Rightarrow$ $\forall n \geq 1 \ \exists x_n \in [a,b]$ mit $s_n < f(x_n) \ (\leq s)$

$\Rightarrow$ Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_i})_{i\geq 1}$ von (x_n), für die der Grenzwert $x_0 = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} \in [a,b]$ existiert

$\Rightarrow$ $s \xleftarrow{(i\to\infty)} s_{n_i} < f(x_{n_i}) \xrightarrow{(i\to\infty)} f(x_0) \leq s$

$\Rightarrow$ $s \in \mathbb{R}$ und $s \leq f(x_0) \leq s$, das heißt $s = f(x_0)$

Genauso findet man ein $y_0 \in [a,b]$ mit $f(y_0) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b]$.

Der Rest ist klar.

$\boxtimes$

Die Abgeschlossenheit des Intervalls $[a,b]$ ist wesentlich für den letzten Satz:

$f:]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht beschränkt.

Eine einfache Übungsaufgabe zeigt, dass für eine beschränkte Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ und eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff$ Für jede konvergente Teilfolge $(x_{n_i})_i$ von (x_n) gilt $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x$.

11.10 Satz (Stetigkeit von Umkehrfunktionen)

Sei $I = [a,b]$ und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend oder fallend

$\Rightarrow$ $f: I \longrightarrow J := [\min f([a,b]), \max f([a,b])]$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: J \to I, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

ist stetig

Beweis: Nach Satz 11.9 ist f surjektiv, wegen der strengen Monotonie injektiv. Sei $J \ni y_n \xrightarrow{n} y \in J$.

$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutige $x_n, x \in I$ mit $f(x_n) = y_n$ und $f(x) = y$

Zu zeigen ist: $(x_n) \xrightarrow{n} x$.

Sei $(x_{n_i})_i$ eine konvergente Teilfolge von x_n mit $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x'$

$$\Rightarrow \quad f(x') = \lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} y_{n_i} = y = f(x)$$

$$\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} \quad x' = x.$$

Aus den Bemerkungen, die den Satz vorausgehen, folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \boxtimes$$