§ 12 Spezielle Funktionen

Für $x > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m > 0$ definiert man

$$x^{\frac{n}{m}} := \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n .$$

Wie kann man x^a für $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ sinnvoll definieren?

12.1 Satz (Exponentialfunktion) Die Funktion

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{Beispiel } 9.5(2))$$

hat die Eigenschaften

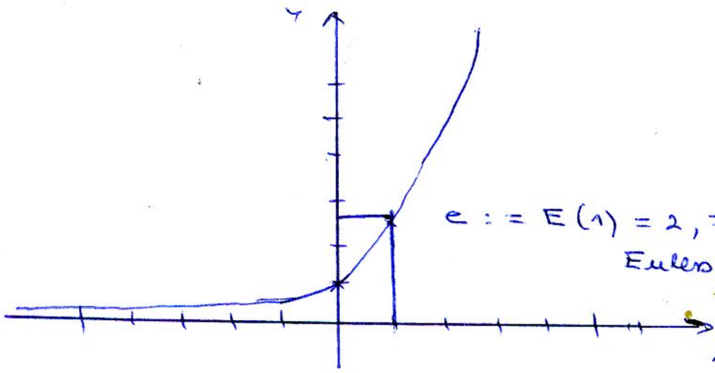
(i) $E(x)\,E(y) = E(x+y)$, $E(x)\,E(-x) = E(0) = 1 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $|E(x) - E(0)| \leq |x|\, E(1)$ für $|x| \leq 1$,

(iii) E ist stetig und streng monoton wachsend mit

$$\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} E(x) = \infty \quad (\text{vgl. Def. } 11.1)$$

(iv) $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$. Der Graph von E hat die Gestalt



$e := E(1) = 2{,}71828\ldots \; (\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Eulersche Zahl

Beweis: (i) Nach Beispiel 9.5.2 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$. Nach der Formel für das Cauchy-Produkt (8.15(b)) gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$E(x)\,E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, x^j\, y^{n-j}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}\right) \underset{\text{Lehrsatz } 1.8}{\overset{\text{Binomischer}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$$

(ii) $|E(x) - E(0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq |x|\, E(1) \;\forall |x| \leq 1$

(iii) Für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \underbrace{1+x}_{>1>0} \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty, \quad E(-x) \overset{(i)}{=} \frac{1}{E(x)} \leq \frac{1}{1+x} \xrightarrow{(x\to\infty)} 0$$

Also gilt für $y > x$

$$E(y) \overset{(i)}{=} \underbrace{E(x)}_{>0}\ \underbrace{E(y-x)}_{>1} > E(x) \quad (\Rightarrow E \text{ ist streng monoton wachsend})$$

Für $(x_n) \xrightarrow{n} 0$ gilt

$$|E(x_n) - E(0)| \underset{\text{für } n \text{ groß genug}}{\overset{(ii)}{\leq}} |x_n|\, E(1) \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$$

Für $(x_n) \xrightarrow{n} x$ folgt

$$E(x_n) = E(x)\ \underbrace{E(x_n - x)}_{\xrightarrow{n} 1} \xrightarrow{(n\to\infty)} E(x)$$

Also ist E stetig.

(iv) folgt aus dem ZWS (11.7), denn nach (iii) gibt es zu $c > 0$

Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $E(a) < c < E(b)$

$\overset{ZWS}{\Longrightarrow} \quad c \in E(]a,b[)$ ▨

12.2 Definition Man nennt $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion und schreibt

$$\exp(x) := E(x)$$

(Genauso folgt, dass die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z)$$

stetig ist und die Eigenschaften (i) und (ii) hat für alle $x, y \in \mathbb{C}$ bzw. alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$).

12.3 Satz (natürlicher Logarithmus)

Als bijektive Abbildung hat $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine (bijektive!) Umkehrfunktion

$$\ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \ln y := x, \text{ falls } y = \exp(x).$$

Es gilt

(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \; \forall x,y>0$, $\ln(1)=0$,

(ii) $\ln$ ist streng monoton wachsend und stetig,

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

Beweis: (i) Für $x,y>0$ gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln x)\exp(\ln y) \overset{12.1}{=} \exp(\ln x + \ln y)$$

$\Rightarrow$ ($\exp$ injektiv) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(ii) Für $0<x<y$ gilt $\ln x < \ln y$, denn sonst wäre

$$x = \exp(\ln x) \geq \exp(\ln y) = y$$

Sei $a>0 \overset{12.1}{\Rightarrow} \exists\, x,y\in\mathbb{R}$ mit $\exp(x) < a < \exp(y)$

$\overset{11.9}{\Rightarrow}$ $\exp : [x,y] \longrightarrow [\exp(x), \exp(y)]$ bijektiv, stetig, streng monoton

$\overset{11.10}{\Rightarrow}$ $\ln : [\exp(x), \exp(y)] \longrightarrow [x,y]$ ist stetig

$\Rightarrow$ $\ln$ ist stetig in a

$\boxtimes$

Für $x>0$, $n,m\in\mathbb{Z}_{>0}$ gilt

$$\ln\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \ln\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n\right) = n\ln\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{n}{m}\left(m\ln\left(x^{\frac{1}{m}}\right)\right)$$

$$= \frac{n}{m}\ln\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m\right) = \frac{n}{m}\ln x.$$

$$\Rightarrow \quad x^{\frac{n}{m}} = \exp\left(\ln x^{\frac{n}{m}}\right) = \exp\left(\frac{n}{m}\ln x\right).$$

Die rechte Seite macht Sinn, wenn man $\frac{n}{m}$ durch beliebige $a\in\mathbb{R}$ ersetzt

12.4 Definition

Für $x>0$ und $a\in\mathbb{R}$ definiert man

$$x^a := \exp(a\ln x).$$

12.5 Satz

(i) Für $x, y > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x^a)(y^a) = (xy)^a, \quad x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad 1^a = 1, \quad x^0 = 1$$

(ii) Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a = \exp(a \ln x)$$

stetig und streng monoton wachsend für $a > 0$, streng monoton fallend für $a < 0$.

(iii) Für $a > 0$ ist

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$$

stetig, streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend für } a > 1 \\ \text{fallend für } a < 1 \end{cases}$ und bijektiv.

Für $a > 0$, $a \neq 1$, heißt

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad \log_a(y) = x, \text{ falls } a^x = y$$

der Logarithmus zur Basis a.

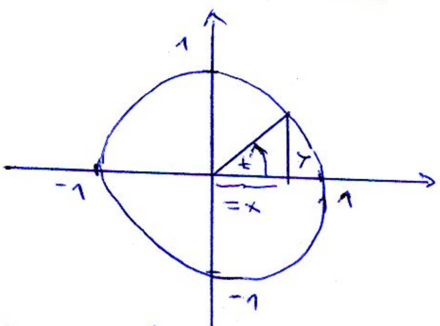
(iv) Mit $e = \exp(1) = 2{,}71828\ldots$ (Eulersche Zahl) folgt

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $\ln = \log_e$.

Trigonometrische Funktionen

12.6 Definition am Einheitskreis



Der Winkel t werde im Bogenmaß, d.h. in Vielfachheiten von $2\pi \mathrel{\hat=} 360°$ gemessen.

Definitionsgemäß ist $\sin t = y$, $\cos t = x$

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\tfrac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\})$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\})$$

12.7 <u>Analytische Definition</u> Sei $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z$$

die komplexe Exponentialfunktion. Definiere für $t \in \mathbb{R}$

$$\cos t := \operatorname{Re} e^{it}, \quad \sin t := \operatorname{Im} e^{it}$$

Wegen $e^0 = 1$, $e^z e^w = e^{z+w}$ und ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig)

$$\overline{(e^z)} = \overline{\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right)} = \lim_{N\to\infty}\left(\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = e^{\bar{z}}$$

für alle $z, w \in \mathbb{R}$ folgt:

12.8 <u>Satz</u> Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $\cos^2 t + \sin^2 t = |e^{it}|^2 = e^{it}\,\overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^0 = 1$

(2) $\cos(s \pm t) = \operatorname{Re}\left(e^{i(s\pm t)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{is} e^{\pm it}\right) = \operatorname{Re}(e^{is}) \operatorname{Re}(e^{\pm it}) - \operatorname{Im}(e^{is}) \operatorname{Im}(e^{\pm it})$

$= \cos(s)\cos(t) \mp \sin(s)\sin(t)$

$\sin(s \pm t) = \ldots = \sin s \cos t \pm \cos s \sin t$

(3) $\sin(-t) = -\sin t$ (sin ist ungerade), $\cos(-t) = \cos t$ (cos ist gerade)

(4) (Reihenentwicklung)

$$\cos t = \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n + (-it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin t = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(5) $$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(folgt aus : $\left|\frac{\sin t}{t} - 1\right| = \left|\frac{\sin t - t}{t}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right|$

$$\le |t|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^{2n-2}}{(2n+1)!} \overset{|t|\le 1}{\le} |t|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \xrightarrow{(t\to 0)} 0 \,)$$

Man definiert $\frac{\pi}{2}$:= kleinste positive Nullstelle von cos und kann zeigen:

12.9 <u>Satz</u> Es gilt

(1) $\sin(t+2\pi) = \sin t$, $\cos(t+2\pi) = \cos t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(2) $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4})$

$\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$

$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$, $\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$

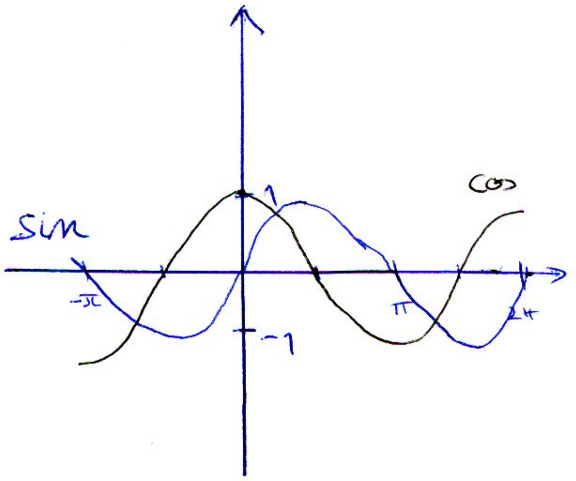
(3) $\{t \in \mathbb{R};\ \sin t = 0\} = \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$

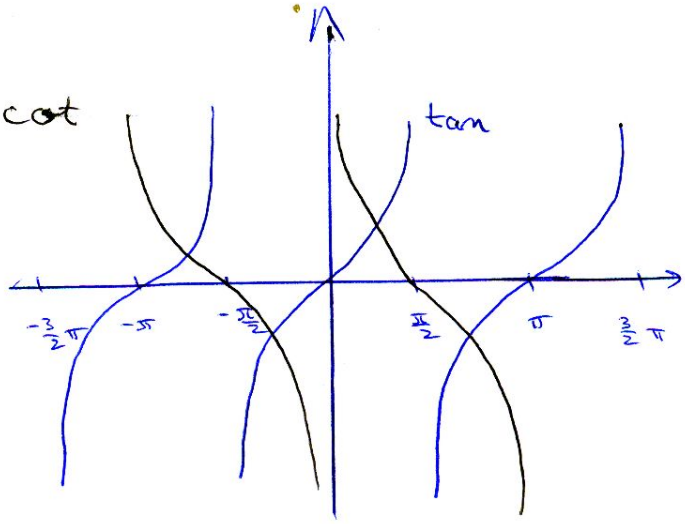
$\{t \in \mathbb{R},\ \cos t = 0\} = \{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(4) sin, cos, tan, cot sind stetige Funktionen mit

$\sin(t+\pi) = -\sin t$, $\cos(t+\pi) = -\cos t$

$\sin(t+\frac{\pi}{2}) = \cos t$, $\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t$





(5) Die Funktionen $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$,

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $\cot :]0,\pi[\to \mathbb{R}$

sind stetig, bijektiv und streng monoton mit stetigen Umkehrfunktionen

$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$,

$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$.