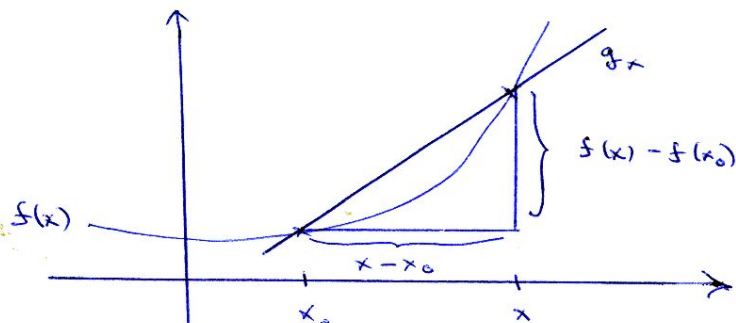


§ 13 Differentialrechnung

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt., $x_0 \in D$



Anschaulich: $f'(x_0) :=$ Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Idee: Steigung der Sekante $g_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ approximiert die Steigung der Tangente für $x \rightarrow x_0$.

13.1 Definition

(a) Man nennt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, falls der Limes

$$f'(x_0) \text{ (oder auch } \frac{df}{dx}(x_0)) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D, x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \quad (\text{Def. 11.1})$$

existiert.

(b) Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf D , wenn f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion

$$f': D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

die Ableitung von f .

13.2 Beispiele (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \equiv c \equiv \text{const} \Rightarrow f' \equiv 0$. Denn:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} 0.$$

(2) $f(x) = x \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Denn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

(3) $f(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Denn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$

(4) Allgemeiner: $f(x) = x^n \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Denn:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$$

(5) $f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Denn:

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!}$$

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |x| e^1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{(x-x_0)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1} = e^{x_0}$$

Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit:

13.3 Satz Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist f stetig in x_0 .

Beweis: Für $(x_n) \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} x_0$ ($x_n \in D \setminus \{x_0\}$) gilt

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \underbrace{\left| \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right|}_{\substack{\text{konvergent, also} \\ \text{beschränkt} = 7.10}} \underbrace{|x_n - x_0|}_{\xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

Es genügt, dies zu zeigen für Folgen (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit Grenzwert x_0 (siehe den Beweis der Implikation " $\Rightarrow$ " im ϵ - δ -Kriterium (Satz 11.2)). $\square$

Die umgekehrte Implikation ist falsch:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig (11.3), aber nicht differenzierbar in 0:

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = 1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 1, \quad \frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = -1 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} -1.$$

13.4 Satz (Rechenregeln) Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g, cf, f \cdot g$ sind differenzierbar in x_0 mit

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c f'(x_0), \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Wenn $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}: D' = \{x \in D; g(x) \neq 0\} \xrightarrow{\supset \mathbb{R}}$ diff. bar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Insondern gilt $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Beweis: Für $f \cdot g$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} g'(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Für $\frac{f}{g}$:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} \frac{1}{g(x_0)^2}} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \square \end{aligned}$$

13.5 Satz (Kettenregel) Seien $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $x_0 \in D$ mit $h(D) \subset E \subset \mathbb{R}$,

$g: E \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $h(x_0) \Rightarrow g \circ h: D \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in x_0 mit

$$(g \circ h)'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0).$$

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $h(x_n) \neq h(x_0) \quad \forall n \geq N$, so gilt für diese n

$$c_n := \frac{g(h(x_n)) - g(h(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{g(h(x_n)) - g(h(x_0))}{h(x_n) - h(x_0)} \cdot \frac{h(x_n) - h(x_0)}{x_n - x_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'(h(x_0)) h'(x_0),$$

sonst nach Satz 13.3 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x_0)$.

Gibt es kein solches N , so ist $h'(x_0) = 0$ und man sieht leicht, dass

$$(c_n) = (\text{beschränkte Folge}) \quad \frac{h(x_n) - h(x_0)}{x_n - x_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = g'(h(x_0)) h'(x_0).$$

□

13.6 Beispiele (1) Nach Satz 13.4 sind rationale Fkt'en $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

(p, q Polynomfunktionen) diff. bar auf $D = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$ (vgl. 11.5)

(2) $g(x) = x^n$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\Rightarrow (h^n)' = (g \circ h)' \stackrel{13.5}{=} (g' \circ h) \cdot h' \stackrel{13.2}{=} n h^{n-1} h' \quad (iv)$$

(3) $g(x) = e^x$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$$\Rightarrow (e^h)' = (g \circ h)' \stackrel{13.5}{=} (g' \circ h) h' \stackrel{13.2}{=} e^h \cdot h' \quad (v)$$

13.7 Satz (Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen)

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton und ist

$x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ($c = \min f([a, b])$, $d = \max f([a, b])$) differenzierbar in $\gamma_0 := f(x_0)$ mit

$$(f^{-1})'(\gamma_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Sei $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $[c, d] \setminus \{\gamma_0\}$ mit Limes γ_0

$$\stackrel{11.10}{\Rightarrow} [a, b] \setminus \{x_0\} \ni x_n := f^{-1}(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{-1}(\gamma_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(\gamma_n) - f^{-1}(\gamma_0)}{\gamma_n - \gamma_0} = \frac{1}{\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f'(x_0)} \quad \stackrel{7.7}{=} \quad \square$$

13.8 Beispiele

- (1) Natürlicher Logarithmus ist differenzierbar als Umkehrfst. von exp.

Durch Ableiten von

$$x = \ln(\exp(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erhält man

$$1 = \frac{d}{dx}(x) \stackrel{13.5}{=} \ln'(\exp(x)) \exp'(x) \stackrel{13.2(5)}{=} \ln'(\exp(x)) \exp(x)$$

$$\Rightarrow \ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{12.1(IV)}{\Rightarrow} \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

Anwendung: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln f) \stackrel{13.5}{=} \ln'(f) \cdot f' = \frac{f'}{f} \quad (\text{Logarithmische Ableitung})$$

- (2) Für $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach der Quotientenregel (13.4)

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{|n|}}\right)' = - \frac{|n| x^{|n|-1}}{(x^{|n|})^2} = n x^{n-1}$$

Also gilt $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad (\text{nur für } x \neq 0, \text{ wenn } n < 0)$$

- (3) Allgemeine Potenzfunktionen

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ diff. bar mit

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x > 0$$

Dies folgt aus der KR = 13.5:

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \ln x)' &= \exp'(\alpha \ln x) (\alpha \ln x)' = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha x^\alpha \frac{1}{x} \stackrel{\text{Auf 36}}{=} \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- (4) Allgemeine Exponentialfunktion Für $a > 0$ gilt

$$(a^x)' = (\ln a) a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Denn

$$\exp(x \ln a)' \stackrel{13.5}{=} \exp'(x \ln a) (x \ln a)' = (\ln a) a^x.$$

13.9 Satz

Sei $-\infty \leq a < x_0 < b \leq \infty$. Hat f die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{für } x \in]a, b[,$$

so ist f diff. bar auf $]a, b[$ und $\forall x \in]a, b[$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n.$$

Die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

konvergiert für $x \in]a, b[$ und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[\quad (\Leftrightarrow F \text{ ist Stammfunktion zu } f)$$

Durch wiederholtes Anwenden von Satz 13.9 erhält man

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x-x_0)^n \Rightarrow f''(x_0) = 2! a_2$$

$$f'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) a_{n+3} (x-x_0)^n \Rightarrow f'''(x_0) = 3! a_3$$

...

$$f^{(2)}(x) \quad (:= \underbrace{(\dots ((f')')' \dots)}_{2\text{-mal}})'(x))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \dots (n+2) a_{n+2} (x-x_0)^n \Rightarrow f^{(2)}(x_0) = 2! a_2$$

13.10 Korollar Konvergiert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ für $x \in]a, b[$ mit $x_0 \in]a, b[$,

so ist f ∞ -oft differenzierbar auf $]a, b[$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

(Schreibweisen: $f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = (\dots ((f')')' \dots)'(x)$ 2-te Ableitung)

13.11 Beispiele (a) Aus der Darstellung $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$) folgt

$$(i) \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \stackrel{13.9}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad (|x| < 1)$$

$$(ii) \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

Für (ii) braucht man Satz 13.9 und (14.6(b)):

Zwei Stammfunktionen auf einem Intervall unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, sind also gleich, wenn sie an einer Stelle übereinstimmen

$$(b) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (12.8)$$

$$\stackrel{13.9}{\Rightarrow} \sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nach der Quotientenregel (13.4) folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

13.12 Einige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$ (für $x \in \mathbb{R}$, wenn $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn $n \in \mathbb{R}_{<0}$)
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x^{\alpha-1}$ (für $x > 0$)
e^x	e^x
a^x ($a > 0$)	$(\ln a) a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$ ($x > 0$)
$\log_b(x)$	$\frac{1}{x \ln b}$ ($x > 0, b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$)
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$)