§ 14 Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\qquad (\varepsilon\text{-Umgebung von } x_0)$$

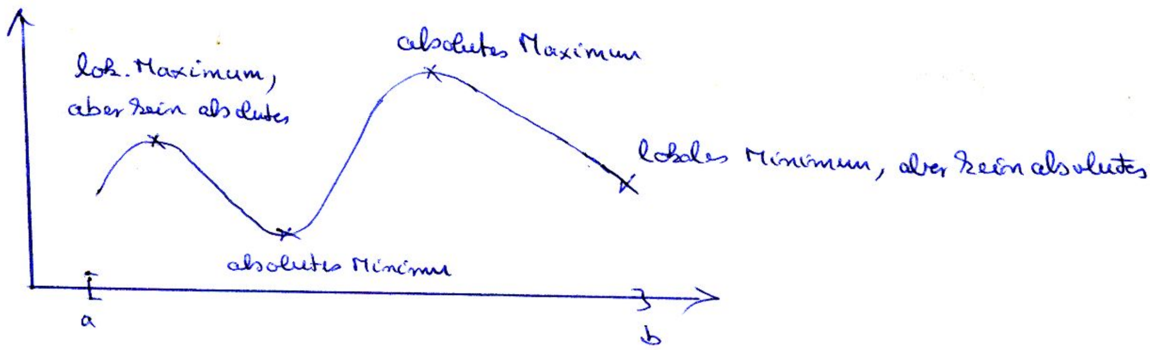
14.1 **Definition** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$

f hat in x_0 ein <u>lokales Maximum</u>, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in D \cap \mathcal{U}_\varepsilon(x_0),$$

ein <u>lokales Minimum</u>, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in D \cap \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$$



Ein <u>lokales Extremum</u> ist ein lokales Maximum oder Minimum

Ein lokales Extremum heißt <u>isoliert</u>, wenn man $\varepsilon > 0$ so wählen kann, dass "$=$" in $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \cap D$ nur für $x = x_0$ gilt

14.2 <u>Satz</u> (Notwendige Bedingung) Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff.bar in $x_0 \in]a,b[$.

Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$

<u>Beweis</u> (für lokale Minima):

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \leq 0 \qquad \blacksquare$$

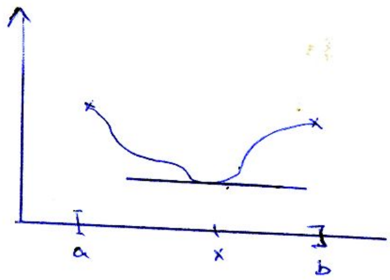
14.3 __Bemerkung__ (a) Satz 14.2 gilt nicht für differenzierbare Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ in Punkten $x_0 \in \{a,b\}$ (siehe Zeichnung)

(b) Die Bedingung ist nicht hinreichend: Für $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber f hat in 0 kein lokales Extremum.

14.4 __Satz__ (von Rolle)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]a,b[}$ diff.bar mit $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\, x \in \,]a,b[$ mit $f'(x) = 0$.



__Bew.:__ Wähle $x_0, y_0 \in [a,b]$ mit (11.9)

$$f(x_0) \le f(x) \le f(y_0) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Ist $f(x_0) = f(y_0)$, so ist $f \equiv \text{const}$ und $f' \equiv 0$

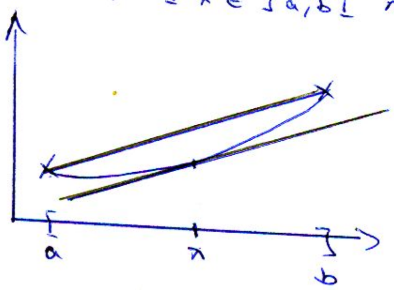
Sonst ist $x_0 \notin \{a,b\}$ oder $y_0 \notin \{a,b\}$ und nach 14.2

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(y_0) = 0$$

☒

14.5 __Satz__ (1. Mittelwertsatz der DR) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar auf $]a,b[$

$\Rightarrow \exists\, x \in \,]a,b[$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$



__Bew.__: Wende 14.4 an auf $h: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

☒

14.6 __Korollar__ Sei f wie in 14.5.

(a) $f' \equiv 0$ auf $]a,b[\Rightarrow f \equiv \text{const}$ $\left(\text{Zu } c \in \,]a,b] \;\exists\, x \in \,]a,c[\text{ mit } \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(x) = 0 \Rightarrow f(c) = f(a) \right)$

(b) Sind $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $f' = g'$, so ist $f - g \equiv \text{const}$.

14.7 Satz (2. MWS der DR) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar auf $]a,b[$ mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

$$\Rightarrow \exists x \in]a,b[\text{ mit } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: Wende den Satz von Rolle (14.4) an auf $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$ ☒

14.8 Satz (Hinreichende Bedingungen für Monotonie)

Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]a,b[}$ differenzierbar

(i) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$

(ii) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ ist monoton fallend auf $[a,b]$

Ersetzt man "$\geq$" durch "$>$" bzw. "$\leq$" durch "$<$", so erhält man strenge Monotonie.

Beweis für (i) Für $c, d \in I$ mit $c < d$ gibt es nach 14.5 ein $x \in]c,d[$ mit

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(x) \geq 0$$ ☒

14.9 Satz (Lokale Extrema: Hinreichende Bedingungen) Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar und sei $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Minimum in x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Maximum in x_0

Beweis: Es gelte: $\dfrac{f'(x)}{x-x_0} = \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{(x \to x_0)} f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $\dfrac{f'(x)}{x-x_0} > 0$ auf $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus \{x_0\}$

$\overset{14.8}{\Rightarrow} f$ streng monoton fallend auf $]x_0-\varepsilon, x_0]$, wachsend auf $[x_0, x_0+\varepsilon[$

$\Rightarrow f$ hat ein isoliertes lokales Minimum in x_0

Der Rest folgt analog. ☒

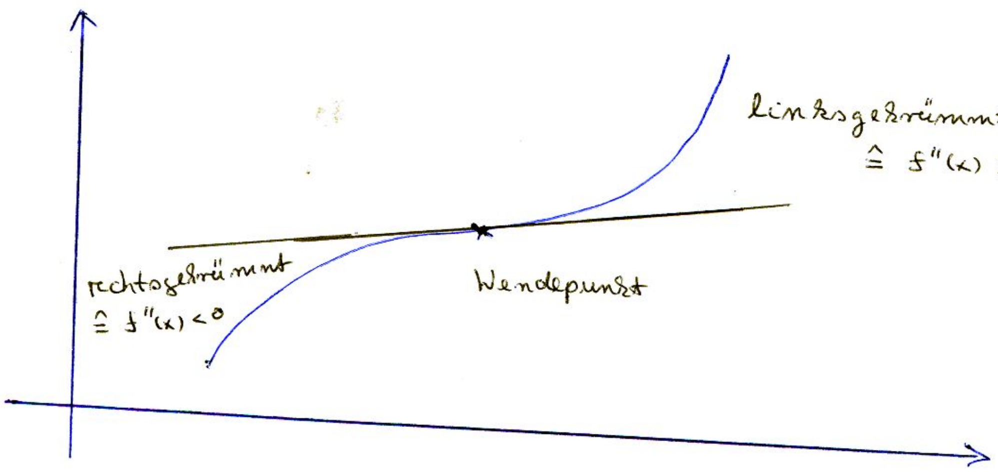
Krümmung und Wendepunkte

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar und sei $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset [a,b]$

Ist $f''(x) > 0$ für $x \in]x_0, x_0+\varepsilon[$, dann wächst f' nach Satz 14.8 streng monoton auf $[x_0, x_0+\varepsilon]$, d.h.

für $x_0 \leq x_1 < x_2 \leq x_0+\varepsilon$ ist der Anstieg in x_1 kleiner als in x_2.

In diesem Fall nennt man f linksgekrümmt (konvex) auf $]x_0, x_0+\varepsilon[$



Entsprechend: Falls $f''(x) < 0$ auf $]x_0-\varepsilon, x_0[$, heißt f hier rechtsgekrümmt (konkav)

Beachte: Ist f rechtsgekrümmt auf $]x_0-\varepsilon, x_0[$ und linksgekrümmt in $]x_0, x_0+\varepsilon[$, so hat f' in x_0 ein isoliertes lokales Minimum

$$f'(x_0) < f'(x) \quad \forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\setminus \{x_0\}$$

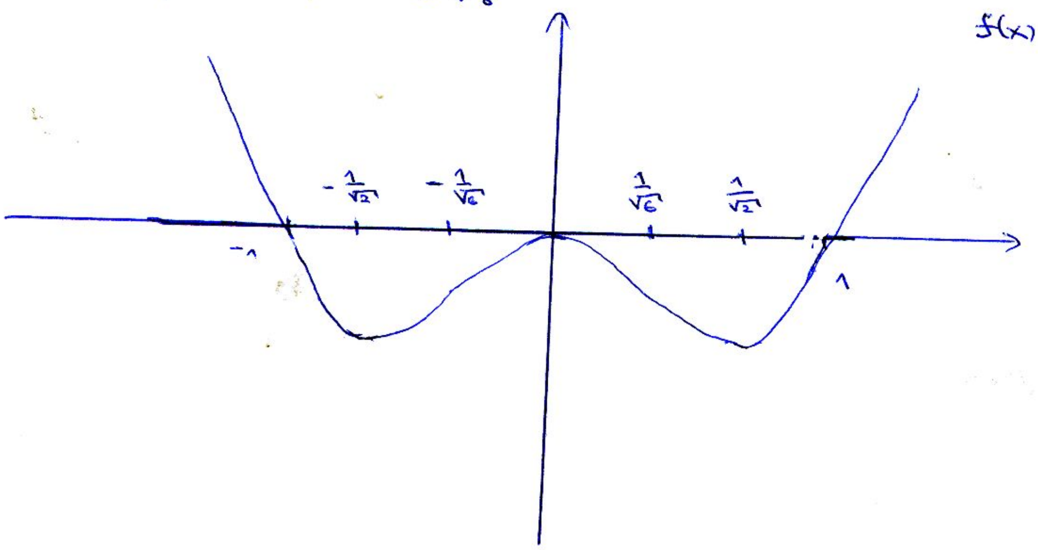
14.10 Definition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Stellen $x_0 \in]a,b[$, in denen f' ein isoliertes lokales Extremum hat, heißen Wendepunkte von f. Ist zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so nennt man den Wendepunkt einen Sattelpunkt.

14.11 Beispiele (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2$ $(= 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, -1\})$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1) = 0 \iff x \in \{0, \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\}$

$$f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x^2 - \tfrac{1}{6}\right) \begin{cases} > 0, & |x| > \sqrt{\tfrac{1}{6}} \\ = 0, & |x| = \sqrt{\tfrac{1}{6}} \\ < 0, & |x| < \sqrt{\tfrac{1}{6}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f hat isoliertes lokales Maximum in $x=0$, isolierte lokale Minima in $x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, Wendepunkte in $x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{6}}$

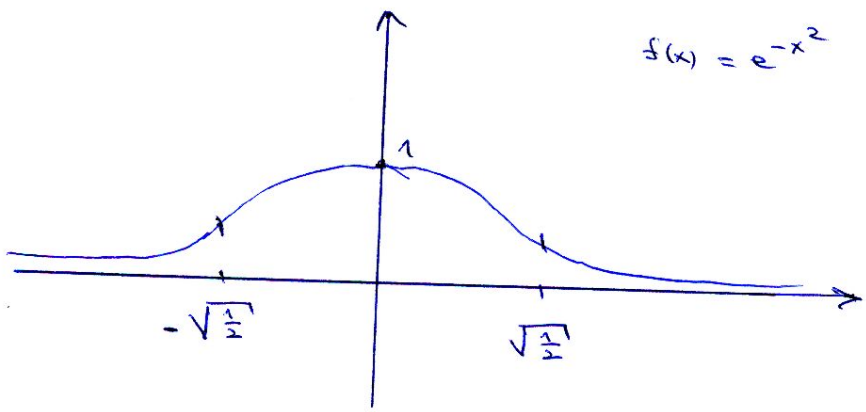


(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = -2x\,e^{-x^2} = 0 \iff x = 0$

$$f''(x) = (-2 + 4x^2)\,e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2-1) \begin{cases} > 0, & |x| > \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ (linksgekrümmt)} \\ = 0, & |x| = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ < 0, & |x| < \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ (rechtsgekrümmt)} \end{cases}$$

Wegen $f''(0) = -2 < 0$ liegt in 0 ein isoliertes lokales Maximum, Wendepunkte liegen bei $\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$



Regeln von L'Hospital

Problem: Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{x\to b} f(x) = 0 = \lim_{x\to b} g(x) \quad (\text{oder Grenzwert } \infty \text{ statt } 0).$$

Was kann man über $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ sagen?

14.12 Satz (a) Seien $-\infty \le a < b \le \infty$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) \in \{0, \infty\}, \quad g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b).$$

Existiert

$$l = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so gilt auch

$$l = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(b) Es gelten dieselben Regeln für "$\lim\limits_{x\to a}$" und für "$\lim\limits_{x\to x_0}$" mit $x_0 \in (a,b)$.

Beweis (für $b < \infty$ und $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$)

Durch $f(b) := 0 =: g(b)$ werden f, g zu stetigen Funktionen auf $(a,b]$.
Nach dem 2. MWS (14.7) gibt es für $x \in (a,b)$ ein $t_x \in (x,b)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} \xrightarrow{(x\to b)} l,$$

da mit $x \to b$ auch $t_x \to b$ gilt. ▨

14.13 Beispiel

$$\frac{(e^{2x}-1)'}{(\ln(1+x))'} = \frac{2e^{2x}}{\left(\frac{1}{1+x}\right)} \xrightarrow{(x\to 0)} \frac{2}{1} = 2 \overset{14.12(b)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = 2.$$

Durch mehrfaches Anwenden von Satz 14.12 erhält man:

14.14 Satz Seien $-\infty \le a < b \le \infty$, $x_0 \in [a,b]$,

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar mit $g^{(n)}(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ und

$$\lim_{x\to x_0} f^{(\nu)}(x) = \lim_{x \to x_0} g^{(\nu)}(x) = 0 \quad \text{für } \nu = 0, \dots, n-1$$

(bzw. ∞ für $\nu = 0, \dots, n-1$). Existiert

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so gilt auch $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

14.15 Einige wichtige Grenzwerte

(1) Für $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{14.12}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$ und

$$\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{14.14}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)^{(n)}}{(x^n)^{(n)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty.$$

Hieraus folgt, dass für jedes $\alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

(3) $$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\ge 1} = \Big(\exp\underbrace{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ nach } (1)}\Big)_{n\ge 1} \xrightarrow{(n\to\infty)} \exp(0) = 1$$

(4) $$\left(\sqrt[n]{c}\right)_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln c\right) \xrightarrow{(n\to\infty)} \exp(0) = 1 \quad \text{für jedes } c > 0$$

(5) $$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\Big(x \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln 1}{\frac{x}{n}}}_{\xrightarrow{(n\to\infty)} \ln'(1) = 1}\Big) \xrightarrow{(n\to\infty)} e^x \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$