

§ 15 Der Satz von Taylor

Nach Korollar 13.10 gilt:

Hat $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Potenzreihenentwicklung in $x_0 \in]a, b[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in]a, b[),$$

so ist f ∞ -oft differenzierbar und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problem: Für welche ∞ -oft differenzierbaren Funktionen f gilt nahe x_0 die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n?$$

Die Reihe nennt man die Taylorreihe von f mit Entwicklungszentrum x_0 .

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar. Fixiere $x, x_0 \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$.

Die Funktion $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(t)}{v!} (x-t)^v$$

ist differenzierbar mit

$$F'(t) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v+1)}(t)}{v!} (x-t)^v - \sum_{v=1}^n \frac{f^{(v)}(t)}{(v-1)!} (x-t)^{v-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Der 2. MWS (14.7) angewendet auf F und

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = (x-t)^{n+1}$$

liefert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} = - \frac{f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^n}{n! (n+1) (x-\xi)^n} = - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

oder

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) = F(x_0) + (g(x) - g(x_0)) \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} \\ &= \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

15.1 Satz (Taylorde Formel mit Restglied von Lagrange)

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal diff. bar und seien $x, x_0 \in (a, b)$ ($-\infty < a < b < \infty$)
 $\Rightarrow$ Es gibt ein $\xi \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$ mit

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Man nennt (bei festem $x_0 \in (a, b)$)

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v \quad \left(= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right)$$

das Restglied $(n+1)$ -Ordnung.

15.2 Folgerungen (a) $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ∞ -oft diff. bar, $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für $x \in (a, b)$:

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v \iff \left(R_{n+1}(x) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn ein $A \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in (a, b)$$

(b) $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal diff. bar mit $f^{(n+1)} \equiv 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v$

15.3 Beispiele (1) Taylorreihen in $x_0 = 0$ für

$$\sin: \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos: \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\exp: \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(2) Restgliedabschätzungen für $\sin$

$$\sin x = \sum_{v=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(v)}(0)}{v!} x^v + R_{2n+3}(x) = \sum_{v=0}^{2n+2} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} + R_{2n+3}(x)$$

$$\text{mit } |R_{2n+3}(x)| = \left| \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \leq \frac{1 \cdot |x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(3) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Man kann zeigen:

f ist ∞ -oft diff. bar mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$