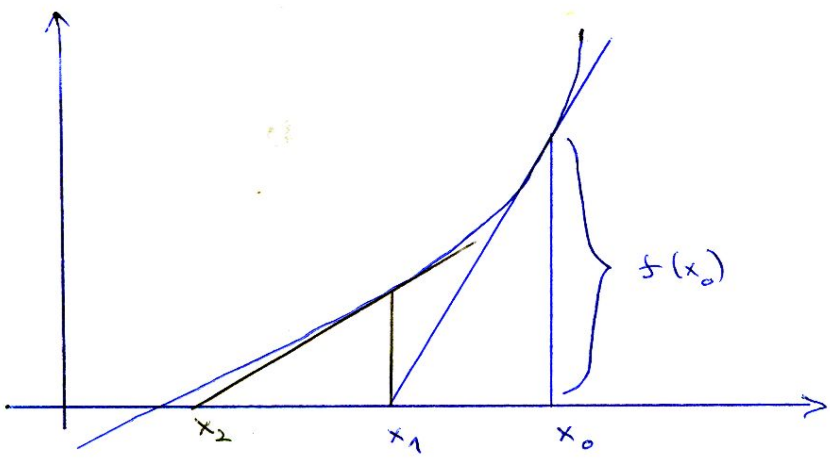
§ 16 Das Newtonverfahren

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2× differenzierbar mit $f(a) < 0 < f(b)$

Nach dem ZWS (11.7) gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Kann man ξ "berechnen"?

Idee: Sei $x_0 \in [a,b]$



Ersetze f durch die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Die Nullstelle x_1 der Tangente erhält man aus

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Wiederholen dieses Schrittes führt zu der rekursiv definierten Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Wenn $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert und $f'(x) \neq 0$ ist $\forall x \in [a,b]$, folgt

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \Rightarrow f(\xi) = 0.$$

Probleme: Ist $x_n \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$? Konvergiert (x_n) automatisch?

Im Allgemeinen nicht!

Man kann zeigen (Forster, Analysis I, § 17):

16.1 Satz Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $2\times$ differenzierbar mit $f(a) < 0 < f(b)$ und $f'' \geq 0$ auf $]a,b[$. Dann gilt:

(a) Es gibt genau ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.

(b) Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$, so definiert

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine monoton fallende Folge, die gegen ξ konvergiert. Insbesondere gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Ist $f'(\xi) \geq c > 0$ und $f'' \leq K$ auf $[a,b]$, so gilt

$$|\xi - x_n| \leq \frac{K}{2c} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Indem man den obigen Satz auf $-f$ anwendet, erhält man eine Version des Satzes für $f(a) > 0 > f(b)$ und $f'' \leq 0$ auf $]a,b[$. Teil (a) bleibt richtig, Teil (b) bleibt richtig, wenn man "$f(x_0) \geq 0$" durch "$f(x_0) \leq 0$" ersetzt. Teil (c) wird zu

(c) Ist $f'(\xi) \leq c < 0$ und $f'' \geq K$ auf $[a,b]$, so gilt

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|K|}{2|c|} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad \forall n \geq 1$$

16.2 Beispiel Sei $\alpha \in]0,1[$ und $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \alpha$

Nach Satz 16.1 konvergiert die Folge

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$

monoton fallend gegen $\sqrt{\alpha}$ mit

$$|\sqrt{\alpha} - x_n| \leq \frac{2}{2\sqrt{\alpha}} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Nullstellen von Polynomen

Man zeigt in der Funktionentheorie:

16.3 Satz (Fundamentalsatz der Algebra) Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$$

ein komplexes Polynom vom Grade n (d.h. $a_n \neq 0$)

$\Rightarrow \exists\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden) mit

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - c_k) \qquad \text{(Linearfaktorzerlegung von } p\text{)}$$

Insbesondere gibt es für $n \geq 1$ mindestens ein $c \in \mathbb{C}$ mit $p(c) = 0$

16.4 Definition Sei p wie oben. Für $c \in \mathbb{C}$ nennt man

$$\#(\{k \in \{1, \ldots, n\};\ c_k = c\})$$

die Vielfachheit von c als Nullstelle von p.

16.5 Reelle Polynome:

(1) Ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so ist mit $c \in \mathbb{C}$ auch $\bar{c}$ eine Nullstelle von p:

$$0 = \overline{p(c)} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{c}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{c}^k = p(\bar{c})$$

mit derselben Vielfachheit

$\Rightarrow$ p hat eine Zerlegung in ein Produkt von Polynomen der Form

$$(z-a)^k \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$(z^2 + bz + c)^j \qquad (b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } \tfrac{b^2}{4} < c)$$

(2) Ist $p(x) = x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b^2}{4} - c)$, so gilt

$\frac{b^2}{4} < c \Rightarrow p$ hat keine reelle Nullstelle

$\frac{b^2}{4} \geq c \Rightarrow p$ hat die Nullstellen $-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.