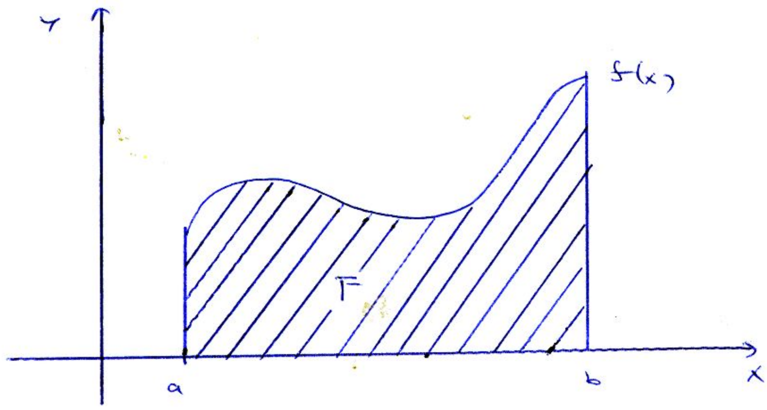
§ 17 Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion

<u>Anschauliche Definition</u> Den Inhalt F der Fläche zwischen dem Graphen von f



und der x-Achse zwischen a und b nennt man das <u>Integral</u> von f

$$\int_a^b f\,dx := F.$$

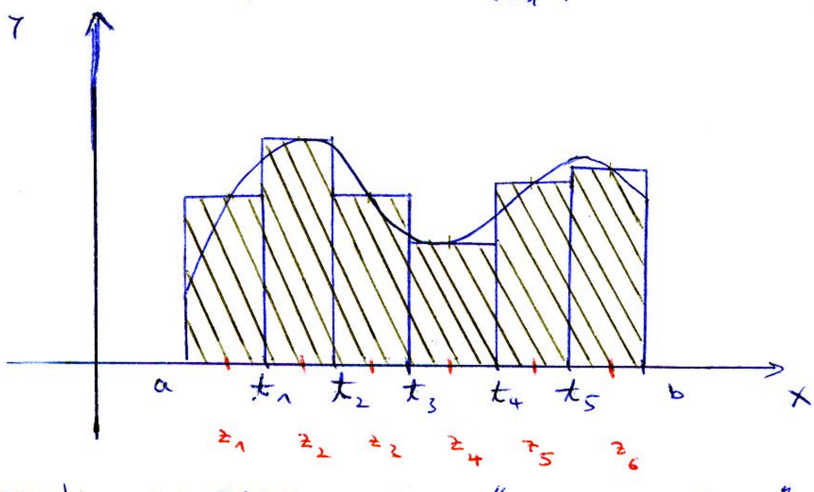
Dabei bewertet man Flächen über der x-Achse positiv, unter der x-Achse negativ.

17.1 Approximation durch Riemannsummen

Wähle eine <u>Teilung</u> $T = (t_i)_{i=0}^n$ von $[a,b]$, d.h. eine Folge $(t_i)_{i=0}^n$ mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

und eine <u>Zwischenfolge</u> $z = (z_i)_{i=1}^n$, d.h. Punkte $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, und



berechne die Fläche unter der "Treppenfunktion"

$$S(f,T,z) = \sum_{i=1}^n f(z_i)\,(t_i - t_{i-1}) \qquad \left(\underline{\text{Riemannsumme}}\text{ bzgl. } (T,z)\right)$$

Idee: Mache T feiner und feiner, d.h. wähle die Feinheit von T

$$\omega(T) = \max_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}|$$

kleiner und kleiner.

17.2 Definition Sei $T = (t_i)_{i=0}^n$ eine Teilung von $[a,b]$. Eine Funktion $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion bzgl. T, falls

$$\varphi|_{]t_{i-1}, t_i[} \equiv c_i \text{ konstant ist } \forall i = 1, \dots, n.$$

In diesem Fall definiert man

$$\int_a^b \varphi \, dx = \sum_{i=1}^n c_i (t_i - t_{i-1}). \quad \left(=: I_T(\varphi)\right)$$

17.3 Bemerkung (a) Eine Fkt. φ kann Treppenfkt. bzgl. verschiedenen Teilungen T, T' sein.

In diesem Fall gilt: $I_T(\varphi) = I_{T'}(\varphi)$. Zur Begründung beachte:

(i) Ist T' feiner als T, d.h. geht aus T durch Einfügen weiterer Punkte hervor, so ist dies klar.

(ii) Zu je zwei Teilungen T, T' gibt es immer eine gemeinsame Verfeinerung T''.

(b) Sind $\varphi, \psi: [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfkt'en mit $\varphi \le \psi$ (d.h. $\varphi(x) \le \psi(x) \, \forall x$), so gilt

$$\int_a^b \varphi \, dx \le \int_a^b \psi \, dx$$

Sind φ, ψ Treppenfkt'en bzgl derselben Teilung T, so ist dies klar. Wegen (a) folgt die Beh.

17.4 Definition Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$UI(f) := \sup \left\{ \int_a^b \varphi \, dx;\ \varphi \text{ Treppenfkt. mit } \varphi \le f \right\}$$
$$= \inf \left\{ \int_a^b \psi \, dx;\ \psi \text{ Treppenfkt. mit } f \le \psi \right\} =: OI(f)$$

In diesem Fall definiert man:

$$\int_a^b f \, dx := UI(f) = OI(f).$$

17.5 Bemerkung

Wegen 17.3 (b) gilt immer $UI(f) \le OI(f)$ und "=" ist äquivalent zu

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Treppenfunktionen $\varphi \le f \le \psi$ mit $\int_a^b (\psi - \varphi)\, dx < \varepsilon$.

Zusammenhang mit Riemannsummen.

In der Mathematik zeigt man ([E], Vorlesungsskript, Analysis I)

17.6 Satz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

f ist R-integrierbar $\iff$ Für jede Folge von Teilungen T_n mit $\omega(T_n) \xrightarrow{n} 0$ und jede Wahl von Zwischenfolgen Z_n von T_n existiert

$$\lim_{n\to\infty} S(f, T_n, Z_n) \in \mathbb{R}$$

In diesem Fall sind alle Grenzwerte gleich $\int_a^b f\, dx$.

Wegen $S(f+g, T_n, Z_n) = S(f, T_n, Z_n) + S(g, T_n, Z_n)$, $S(\alpha f, T_n, Z_n) = \alpha S(f, T_n, Z_n)$ folgt hieraus mit den Grenzwertsätzen (7.7):

17.7 Satz Mit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind auch $f+g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig) R-integrierbar und

$$\int_a^b (f+g)\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx, \quad \int_a^b \alpha f\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx$$ ▨

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $T = (t_i)_{i=0}^n$ die äquidistante Teilung

$$t_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, \dots, n)$$

Wähle Treppenfkt'en $\varphi \le f \le \psi$ mit $\varphi \equiv f(t_{i-1})$, $\psi \equiv f(t_i)$ auf $]t_{i-1}, t_i[$

$$\Rightarrow \int_a^b (\psi - \varphi)\, dx = \sum_{i=1}^n \big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)(t_i - t_{i-1}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1})}_{= f(b) - f(a)} \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n} 0$$

$\overset{17.5}{\Rightarrow}$ f ist R-integrierbar.

17.8 Satz Monotone (wachsende oder fallende) Funktionen sind R-integrierbar. ☒

Eine weitere wichtige Klasse R-integrierbarer Funktionen liefert der folgende Satz:

17.9 Satz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist R-integrierbar

Beweis: Nach Satz 11.9 ist f beschränkt

Wir zeigen in zwei Schritten, dass die Bedingung aus Bemerkung 17.5 erfüllt ist.

(1) f ist gleichmäßig stetig ($:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta)$$

Indirekter Beweis: Sonst gäbe es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\forall \delta > 0$, insbesondere zu $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ Zahlen $x_n, y_n \in [a,b]$ existieren würden mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$\overset{\text{Bolzano-Weierstraß}}{\Longrightarrow}$ Durch Übergang zu Teilfolgen kann man erreichen, dass

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{existieren}$$

$$\Rightarrow \quad x = y \text{ und } \varepsilon \leq |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{(n\to\infty)} |f(x) - f(y)| = 0 \ \#$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für alle } x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta$$

Sei $T = (t_i)_{i=0}^n$ eine Teilung von $[a,b]$ mit $\max_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$

$\overset{11.9}{\Longrightarrow}$ $\forall i = 1, \dots, n \ \exists x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ mit

$$f(x_i) \leq f(x) \leq f(y_i) \quad \forall x \in [t_{i-1}, t_i]$$

Wähle Treppenfunktionen $\varphi \leq f \leq \psi$ mit

$$\varphi \equiv f(x_i), \quad \psi \equiv f(y_i) \text{ auf }]t_{i-1}, t_i[$$

$$\Rightarrow \int_a^b (\psi - \varphi)\,dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{(f(y_i) - f(x_i))}_{< \varepsilon/(b-a)} (t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon. \ ☒$$

17.10 **Satz** (Standardabschätzung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

Beweis: Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Teilung T von $[a,b]$ und $Z = (z_i)_{i=1}^n$ eine ZF'e

$\Rightarrow \left| S(f,T,Z) \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(z_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(z_i)| (t_i - t_{i-1}) = S(|f|, T, Z)$.

Seien T_n $(n \geq 1)$ Teilungen mit $\omega(T_n) \xrightarrow{n} 0$ und seien Z_n ZF'en von T_n

$\Rightarrow \left| \int_a^b f\,dx \right| \overset{17.6}{=} \lim_{n\to\infty} \left| S(f, T_n, Z_n) \right| \leq \lim_{n\to\infty} S(|f|, T_n, Z_n) \overset{17.6}{=} \int_a^b |f|\,dx$ ☒

Die folgenden einfachen Regeln sind nicht schwer zu zeigen ([E], Vorlesungsskript, AI, Lemma 17.1)

17.11 **Satz** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und sei $c \in]a,b[$

(a) $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$

(b) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$ ☒