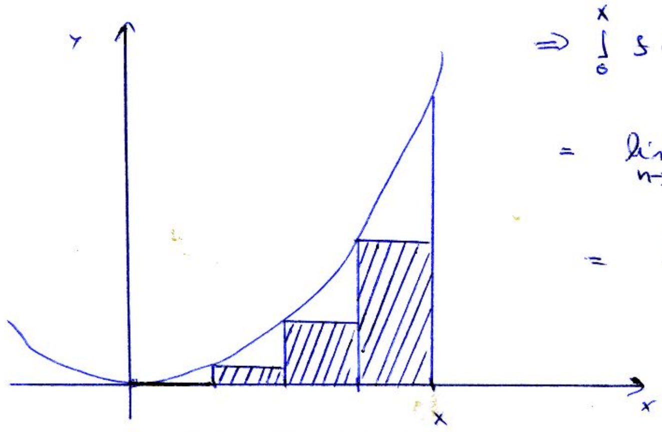
§ 18 Integration und Differentiation

Beispiel



n Intervalle gleicher Länge

$f(t) = t^2$ stetig auf $\mathbb{R}$, also integrierbar auf $[0,x]$

$$\Rightarrow \int_0^x f\,dt \overset{17.6}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left((i-1)\frac{x}{n}\right)\left(\frac{i}{n}x - \frac{i-1}{n}x\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \overset{\text{Induktion}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x^3 \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6} = \frac{x^3}{3}$$

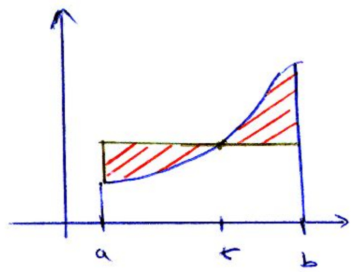
Frage: gibt es einfachere Methoden zur Integralberechnung? Zur Vorbereitung:

18.1 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $t \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f\,dx = f(t)\,(b-a)$$

Beweis:



Für $m = \min_{a\le x\le b} f(x)$, $M = \max_{a\le x\le b} f(x)$ (11.9) gilt

$$m\,(b-a) = \int_a^b m\,dx \overset{17.4}{\le} \int_a^b f\,dx \overset{17.4}{\le} \int_a^b M\,dx = M\,(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx \Big/ (b-a) \in [m, M]$$

$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ oder 11.9 $\exists\, t \in [a,b]$ mit $f(t) = \int_a^b f\,dx \Big/ (b-a)$ ☒

18.2 Definition Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Stammfunktion von f (Englisch: primitive) ist eine differenzierbare Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

18.3 Bemerkung (i) F Stammfkt zu $f \Rightarrow F+c$ Stammfkt. zu f $\forall c \in \mathbb{R}$

(ii) F, G Stammfunktionen zu $f: [a,b] \to \mathbb{R} \overset{14.6}{\Longrightarrow} F - G \equiv \text{const}$

18.4 Satz (Hauptsatz der Diff- u. Integralrechnung) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion und für jede Stammfunktion F von f gilt:

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(=: F\Big|_a^b\right)$$

Beweis: Für $G: [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$G(x) := \int_a^x f\,dt \quad (:= 0 \text{ für } x = a)$$

gilt nach dem MWS (18.1) für $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} \overset{17.11(a)}{=} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0} = f(t) \quad \left(\text{Für } x < x_0 \text{ vertausche } x \text{ und } x_0\right)$$

für geeignetes $t = t_{x,x_0}$ zwischen x und x_0. Wegen

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(t_{x,x_0}) = G'(x_0)$$

ist G Stammfunktion zu f. Ist $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion zu f, so gilt

$$F(b) - F(a) \overset{18.3}{=} G(b) - G(a) = \int_a^b f\,dt.$$

$\boxtimes$

18.5 Schreibweisen (1) Man schreibt oft

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad (x \in D),$$

falls $f: D \to \mathbb{R}$, $F: D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind mit

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Beachte, dass F nicht eindeutig bestimmt ist durch f.

(2) Man definiert für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f: [\min(a,b), \max(a,b)] \to \mathbb{R}$ integrierbar:

$$\int_a^a f\,dx := 0, \qquad \int_a^b f\,dx := -\int_b^a f\,dx, \text{ falls } b < a.$$

Damit gilt

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \quad (17.11(a) \text{ und Fallunterscheidungen})$$

für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ und integrierbare $f: [\min(a,b,c), \max(a,b,c)] \to \mathbb{R}$

18.6 Wichtige Stammfunktionen (vgl. 13.12)

	$f(x)$	$\int f\,dx$	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	Für $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ gilt dies nur für $x \neq 0$ Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt dies nur für $x > 0$
	$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$(x > 0)$
	e^x	e^x	
$a > 0, a \neq 1$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	
	$\cos x$	$\sin x$	
	$\sin x$	$-\cos x$	
	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$(x \notin \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}\})$
	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$(x \in \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\})$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$(x \in \mathbb{R})$ } (vgl. 12.9)
	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(\lvert x\rvert < 1)$ } (vgl. 12.9)
	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \cos x \sin x)$	
	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)$	
	$\ln x$	$x \ln x - x$	$(x > 0)$

Hierbei seien die Arcusfunktionen (vgl. 12.9)

(1) $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die Umkehrfkt. von $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, bijektiv, diff.-bar mit

$$\tan'(x) \overset{13.11(b)}{=} 1 + \tan^2 x \neq 0 \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ (13.7 angewendet auf $\tan|_{[a,b]}$, $-\frac{\pi}{2} < a < x < b < \frac{\pi}{2}$)

$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Man überlegt sich leicht: $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

(2) $\arcsin = \sin^{-1}:]-1,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ Umkehrfkt von $\sin:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]-1,+1[$

$\sin:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-1,1[$ ist streng monoton wachsend, bijektiv, diff.bar mit

$$\sin'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \neq 0 \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ (13.7 angewendet auf $\sin|_{[a,b]}$, $-\frac{\pi}{2} < a < x < b < \frac{\pi}{2}$)

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } |x| < 1$$

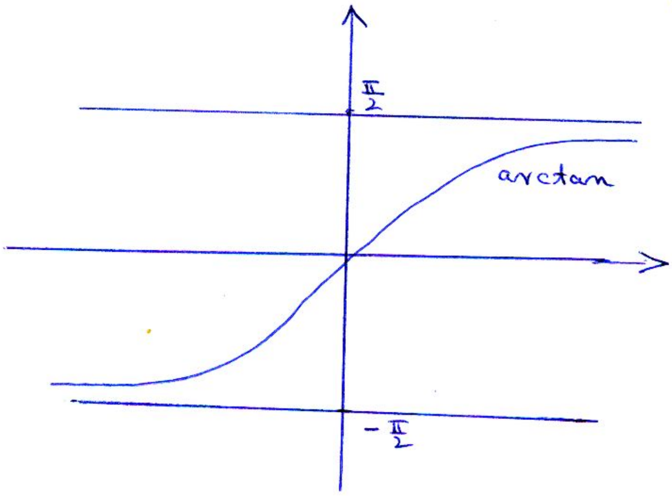
(3) Entsprechend definiert man

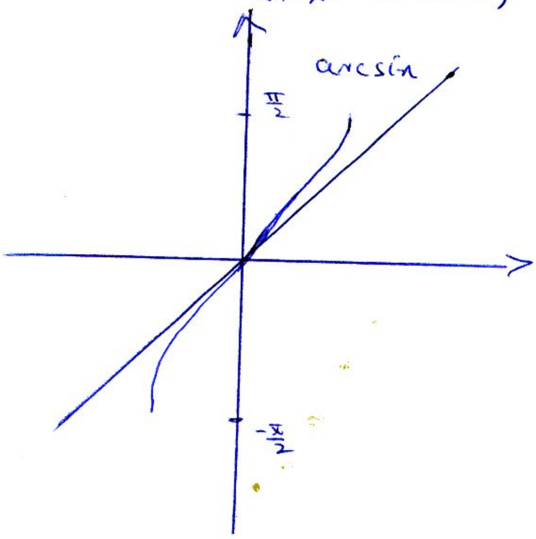
$\operatorname{arccot} = \cot^{-1}: \mathbb{R} \to]0,\pi[$ als Umkehrfkt von $\cot:]0,\pi[\to \mathbb{R}$

$\arccos = \cos^{-1}:]-1,1[\to]0,\pi[$ " $\cos:]0,\pi[\to]-1,1[$

und zeigt, dass

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1)$$





Folgerungen aus dem Hauptsatz

18.7 Satz (Partielle Integration) Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (d.h. f', g' existieren und sind stetig)

$$\Longrightarrow \int_a^b f g' \, dx = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f' g \, dx$$

(oder: $\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$)

Beweis: Nach der Produktregel (13.4) und dem Hauptsatz (18.4) gilt

$$\int_a^b (f'g + fg')\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx = (fg)\Big|_a^b \quad \boxtimes$$

18.8 **Satz** (Substitution)

Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar mit $\varphi([a,b]) \subset [c,d]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Beweis: Sei $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \underset{= 13.5}{\overset{KR}{=}} \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx \underset{= 18.4}{\overset{HS}{=}} (F\circ\varphi)'\Big|_a^b$$

$$= F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underset{= 18.4}{\overset{HS}{=}} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad \boxtimes$$

18.9 **Beispiele** (1) $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt = \int_1^x \underbrace{\ln(t)}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\,dt \overset{18.7}{=} (\ln t)t\Big|_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\,t\,dt$

$$= x\ln(x) - x + 1$$

Beweis vom HS

$$\Rightarrow \int \ln(x)\,dx = x\ln x - x \quad (x>0)$$

(2) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f}\ \underbrace{\cos x}_{g'} \overset{18.7}{=} \cos x \sin x - \int \underbrace{(-\sin x)}_{f'}\underbrace{\sin x}_{g}\,dx$

$$= \cos x \sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)$$

(3) Aus der Substitutionsregel (18.8) folgt für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar

- $f(t) = t^n$: $\displaystyle\int_a^x \varphi(t)^n \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} t^n\,dt = \frac{1}{n+1}\left(\varphi(x)^{n+1} - \varphi(a)^{n+1}\right) \quad (n\in\mathbb{N})$
- $f(t) = \frac{1}{t}$: $\displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \frac{1}{t}\,dt = \ln(\varphi(x)) - \ln(\varphi(a))$, falls $\varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}_{>0}$

(Allgemeiner: $\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \ln|\varphi(x)| - \ln|\varphi(a)|$, falls $0 \notin \varphi([a,b])$)

Hieraus folgt

$$\int \varphi(t)^n \varphi'(t)\,dt = \frac{\varphi(t)^{n+1}}{n+1}$$

(für $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ oder für $n \in \mathbb{Z}_{\leq -2}$ auf jedem Intervall, in dem φ keine Nullstelle hat)

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \ln|\varphi(t)|$$

auf jedem Intervall, in dem φ keine Nullstelle hat

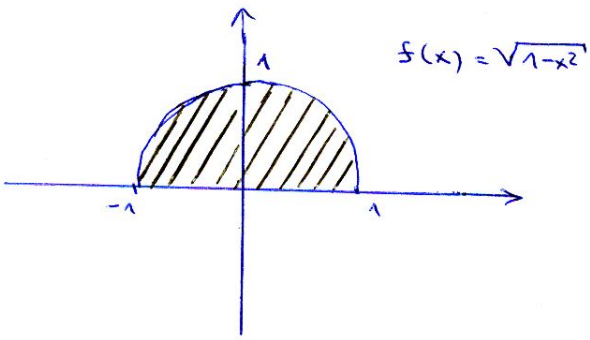
<u>Konkret</u>: $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos t\,dt = \frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$$\int_1^x \underbrace{(\ln t)}_{\varphi}\,\underbrace{\frac{1}{t}}_{\varphi'}\,dt = \frac{(\ln t)^2}{2}\Big|_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

(4) $$\int_{-1=\varphi(\pi)}^{1=\varphi(0)} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\varphi(x)=\cos x}{=} \int_\pi^0 \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 x}}_{=\sin x}\,(-\sin x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$

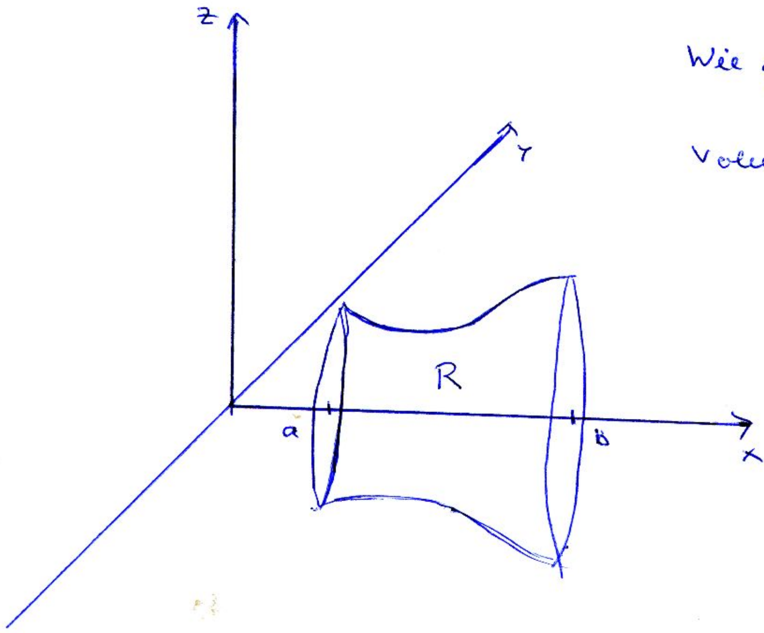
$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$



Der Graph von $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ beschreibt die obere Hälfte der Einheitskreislinie.

<u>Anwendungen:</u>

18.10 <u>Rotationskörper</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Lässt man den Graphen von f um die x-Achse rotieren, so erhält man einen Rotationskörper $R = R(f)$.



Wie groß ist das Volumen von R?

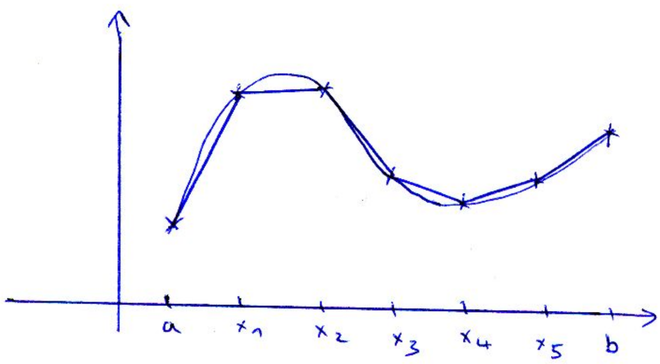
Idee: Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$ und $Z = (z_i)_{i=1}^n$ eine Zwischenfolge (d.h. $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$). Das Volumen des Rotationskörpers mit Radius $f(z_i)$ über $]t_{i-1}, t_i[$

$$V(T) = \sum_{i=1}^n \pi f(z_i)^2 (t_i - t_{i-1})$$

konvergiert für $\omega(T) \longrightarrow 0$ gegen das gesuchte Volumen V von R

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

18.11 Länge von Kurven Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Fasse den Graphen von f als Kurve $K = K(f)$ in $\mathbb{R}^2$ auf. Approximiere die Länge L dieser Kurve



durch einbeschriebene Polygonzüge. Die Länge des Polygonzuges gebildet zur Teilung $T = (t_i)_{i=0}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |(t_i, f(t_i)) - (t_{i-1}, f(t_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$

(1. MWS der DR = 14.5 $\Rightarrow \exists\, z_i \in \,]t_{i-1}, t_i[$ mit $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i)(t_i - t_{i-1})$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(z_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

konvergiert mit $\omega(T) \longrightarrow 0$ gegen das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt =: \text{Länge der Kurve } K(f)$$

<u>Allgemeiner</u>: Für eine "parametrisierte Kurve"

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, dt$$

die <u>Länge von γ</u> (Oben wurde der Spezialfall $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = f(t)$ betrachtet).