§ 19 Uneigentliche Integrale

19.1 Beispiel Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$s \neq 1: \int_1^x \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{-s+1} t^{-s+1}\Big|_1^x = \frac{1}{s-1}\left(1 - x^{1-s}\right) \xrightarrow{(x\to\infty)} \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s > 1 \\ \infty, & s < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x \xrightarrow{(x\to\infty)} \infty$$

19.2 Definition

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ R-integrierbar auf $[a,x]$ $\forall x > a$. Man nennt
$$\int_a^\infty f(t)\,dt := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R},$$
falls dieser Limes existiert, das uneigentliche Integral von f über $[a,\infty)$

(b) Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ und sei $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ unbeschränkt und R-integrierbar auf $[a,x]$ $\forall x \in (a,b)$. Man nennt
$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{x\uparrow b} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R},$$
falls dieser Limes existiert, das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$

(c) Analog definiert man uneigentliche Integrale bei kritischer unterer Grenze.

(d) Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f|_{[\alpha,\beta]}$ R-integrierbar $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ mit $a<\alpha<\beta<b$. Ist f "kritisch" in a und in b, so nennt man f uneigentlich integrierbar über (a,b), falls für ein $c \in (a,b)$ ($\Leftrightarrow \forall c \in (a,b)$) die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite von
$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$
existieren. (Die Summe auf der rechten Seite ist unabhängig von der Wahl von c).

19.3 Beispiele (1) Nach Beispiel 19.1 existiert für $s \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^s}\,dt \quad \left(= \frac{1}{s-1}\right)$$

genau dann, wenn $s > 1$ ist.

(2) Für $s > 0$ und $x \in (0,1)$ ist

$$s \neq 1: \int_x^1 \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{1-s}\left(1 - x^{1-s}\right) \xrightarrow{(x \downarrow 0)} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & ; \ s < 1 \\ \infty & ; \ s > 1 \end{cases}$$

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x \xrightarrow{(x\downarrow 0)} \infty$$

Also existiert $\int_0^1 \frac{1}{t^s}\,dt$ $(s>0)$ genau für $0 < s < 1$ und

$$\int_0^1 \frac{1}{t^s}\,dt = \frac{1}{1-s} \qquad (0 < s < 1).$$

(3) $$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{18.6}{=} \arctan t \,\Big|_0^x = \arctan x \xrightarrow{(x\to\infty)} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan t \,\Big|_x^0 = -\arctan x \xrightarrow{(x\to-\infty)} \frac{\pi}{2}$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

19.4 **Satz** (Integralkriterium für Reihen) Sei $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_0^\infty f(t)\,dt \text{ konvergiert } \left(\begin{array}{l}\text{existiert als}\\ \text{uneigentliches Integral}\end{array}\right)$$

Beweis: Für $N \geq 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) \geq \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f\,dt = \int_0^N f\,dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f\,dt \geq \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1).$$

Da $x \mapsto F(x) = \int_0^x f\,dt$ monoton wächst, existiert $\int_0^\infty f\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f\,dt$

$\iff$ F ist nach oben beschränkt

$\iff$ $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt

Also folgt die Behauptung aus den obigen Ungleichungen. $\boxtimes$

19.5 Korollar Der Grenzwert

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\zeta(s) \text{ heißt } \underline{\text{Riemannsche Zetafunktion}})$$

existiert für $s > 1$ (vgl. Beispiel 8.9)

Die Reihe divergiert für $s \in (-\infty, 1]$, denn für diese s gilt

$$\frac{1}{n^s} = n^{-s} \geq n^{-1} = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1.$$

19.6 Satz (Majorantenkriterium)

Seien $-\infty < a < b \leq \infty$. Sind $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ wie in Teil (a) oder (b) von Definition 19.2 und ist $|f| \leq |g|$ auf $[a,b)$, so gilt:

$$\int_a^b g\,dt \text{ existiert uneigentlich} \Rightarrow \int_a^b f\,dt \text{ existiert uneigentlich.}$$

Analoges gilt für die Fälle (c) und (d) von Definition 19.2.

Beweis: Bemerkung 18.7 in [E]. ▨