

§ 2 Abbildungen

Seien $A, B, \dots$ Mengen

2.1 Definition (a) Eine Abbildung (Funktion, wenn $A, B \subseteq \mathbb{R}$)

$$f: A \rightarrow B$$

ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein $f(x) \in B$ zuordnet. Man nennt f

injektiv, falls $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,

surjektiv, falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$,

bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Die Menge

$$G(f) = \{ (x, f(x)); x \in A \} \subseteq A \times B$$

heißt Graph von f . Falls f bijektiv ist, schreibt man $f^{-1}: B \rightarrow A$ für die Abbildung mit

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in B \quad (\text{Umkehrabbildung})$$

(b) Sind $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ Abb'en, so heißt

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition von g und f

(c) Für Teilmengen $M \subseteq A$, $N \subseteq B$ nennt man

$f|_M: M \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$ die Einschränkung (Restriction) von f auf M

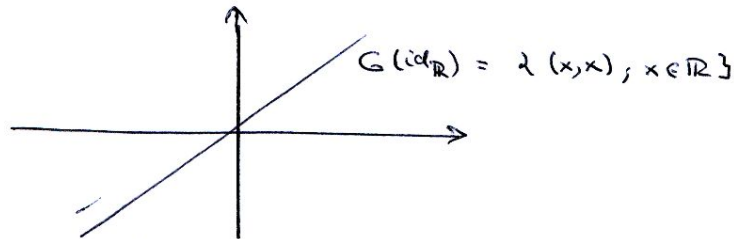
$f(M) = \{ f(x); x \in M \}$ das Bild von M unter f

$f^{-1}(N) = \{ x \in A; f(x) \in N \}$ das Urbild von N unter f .

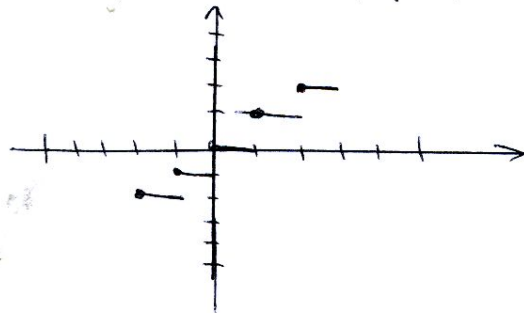
Für $f(A)$ schreibt man auch $\text{Bild}(f)$, $\text{Im}(f)$ oder $\text{ran}(f)$.

2.2 Beispiele

(a) $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ injektiv und surjektiv, also bijektiv

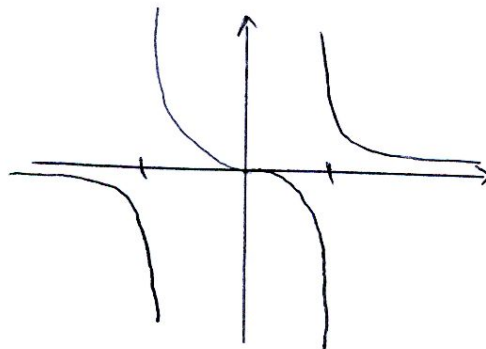


(b) $\text{entier} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto [x] := \text{größte ganze Zahl} \leq x$ (Gaußklammer von x)



surjektiv, aber nicht injektiv

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$



surjektiv, aber nicht injektiv

(d) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ bijektiv mit Umkehrabb.
 $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (= eindeutig bestimmte Zahl in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sqrt{x}^2 = x$)

2.3 Satz Seien A, B Mengen mit $|A| = |B| < \infty$ und $f : A \rightarrow B$ eine Abb.

"Äquivalent sind:

(i) f ist injektiv (ii) f ist surjektiv (iii) f ist bijektiv.

Beweis: Genügt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) zu zeigen. Beachte:

$$A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow \sum_{y \in B} |f^{-1}(\{y\})| = |A| = |B| = \sum_{y \in B} |\{y\}|$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei f injektiv $\Rightarrow |f^{-1}(y)| \leq 1$ für alle $y \in B$

$\Rightarrow |f^{-1}(y)| = 1$ für alle $y \in B$, also f surjektiv

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei f surjektiv $\Rightarrow |f^{-1}(y)| \geq 1$ für alle $y \in B$

$\Rightarrow |f^{-1}(y)| = 1$ für alle $y \in B$, also f injektiv. $\square$

2.4 Korollar = Folgerung (aus dem letzten Beweis)

Seien A, B endliche Mengen und $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung

(a) Ist f injektiv, so ist $|A| \leq |B|$ ($\Leftrightarrow$ Ist $|B| < |A|$, so ist f nicht injektiv)

(b) Ist f surjektiv, so ist $|B| \leq |A|$.

Schreibweisen: Seien A, B Mengen. Man schreibt

$$B^A := \{ f; f: A \rightarrow B \text{ Abbildung} \}$$

Sind A, B endlich, so gilt

$$|B^A| = |B|^{|A|} \quad (\text{vgl. 1.7 (a)})$$

Als Abkürzungen benutzt man die Quantoren

$\exists$ "es gibt"

$\forall$ "für alle"

Beispiel: $f: A \rightarrow B$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in B \exists x \in A$ mit $f(x) = y$

Bei Negation von logischen Aussagen muss man die Quantoren $\forall, \exists$ vertauschen:

$f: A \rightarrow B$ ist nicht surjektiv

$$\Leftrightarrow \neg (\forall y \in B \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in B \forall x \in A : \neg (f(x) = y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in B \forall x \in A : f(x) \neq y$$