§ 20 Numerische Methoden zur Integration

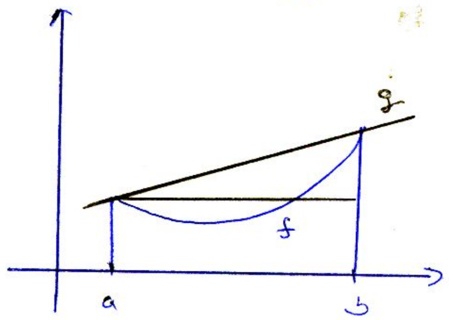
Funktionen, für die man keine Stammfunktion angeben kann, wie etwa

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \ \dots,$$

oder Funktionen, für die man nicht alle Werte kennt, kann man versuchen, numerisch zu integrieren.

Dazu approximiert man f durch einfachen Funktionen

20.1 Trapezregel



Ersetze f durch die lineare Flt g, die in a und b mit f übereinstimmt

$$\int_a^b f\,dx \cong \int_a^b g\,dx$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{1}{2}\big(f(b)-f(a)\big)(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

Wendet man diese Regel an auf alle Teilintervalle einer äquidistanten Teilung

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \qquad (i = 0, \dots, n),$$

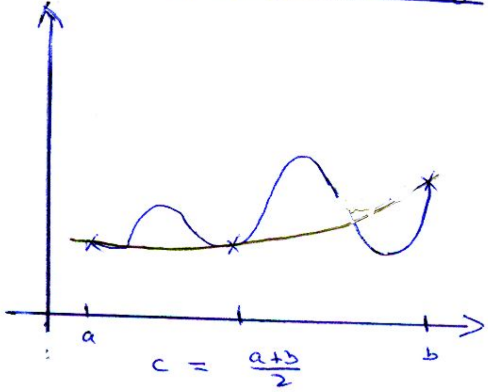
so erhält man die Sehnentrapezregel

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{2n}\big(f(x_{i-1})+f(x_i)\big)$$

$$= \frac{b-a}{2n}\big(f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\big)$$

20.2 Keplersche Fassregel

Ersetze f durch ein Polynom vom Grade ≤ 2, dass in a, $\frac{a+b}{2}$, b mit f übereinstimmt



Es gibt genau ein Polynom $p = p_f$ vom Grade ≤ 2 mit

$$p(a) = f(a)\ ,\ p(c) = f(c)\ ,\ p(b) = f(b),$$

nämlich

$$p(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Approximiert man f durch p, so erhält man die Keplersche Fassregel

$$\int_a^b f\,dx \cong \int_a^b p\,dx \overset{(*)}{=} \left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)\frac{b-a}{6}$$

Begründung von $(*)$: Es ist $a = c - \Delta$, $b = c + \Delta$ mit $\Delta = \frac{b-a}{2}$

Schreibe p als Polynom in $x - c$:

$$p(x) = f(a)\frac{(x-c-\Delta)(x-c)}{2\Delta^2} + f(b)\frac{(x-c+\Delta)(x-c)}{2\Delta^2} - f(c)\frac{(x-c+\Delta)(x-c-\Delta)}{\Delta^2}$$

$$= f(c) + \frac{f(b)-f(a)}{2\Delta}(x-c) + \frac{f(a)+f(b)-2f(c)}{2\Delta^2}(x-c)^2$$

und integriere

$$\int_a^b p\,dx = f(c)\Big|_a^b + \frac{f(b)-f(a)}{2\Delta}\underbrace{\frac{(x-c)^2}{2}\Big|_a^b}_{=0} + \frac{f(a)+f(b)-2f(c)}{6\Delta^2}\underbrace{(x-c)^3\Big|_a^b}_{2\Delta^3}$$

$$= 2f(c)\underbrace{\Delta}_{3\frac{b-a}{6}} + \left(f(a)+f(b)-2f(c)\right)\underbrace{\frac{\Delta}{3}}_{\frac{b-a}{6}} = \left(f(a)+4f(c)+f(b)\right)\frac{b-a}{6}$$

20.3 Bemerkung

(1) Ist f ein Polynom vom Grade ≤ 2, so gilt Gleichheit in der Keplerschen Fassregel, denn $p_f = f$.

(2) Gleichheit gilt auch, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.

Zur Begründung zeige nacheinander:

(i) Gilt Gleichheit für f_1, f_2, so auch für $f_1 \pm f_2$

(ii) Für $f(x) = A(x-c)^3$ gilt Gleichheit (beide Seiten sind 0)

(iii) Wegen

$$\text{Grad}\,(\underbrace{A(x-c)^3 - Ax^3}_{=:\,q(x)}) \leq 2$$

gilt Gleichheit auch für

$$A\,x^3 = A\,(x-c)^3 - q(x)$$

und damit für jedes Polynom vom Grade ≤ 3.

20.4 <u>Simpson-Regel</u> (Thomas Simpson, 1710-1761)

Sei $T = (x_i)_{i=0}^{2n}$ die äquidistante Teilung

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{2n} \qquad (i = 0,\dots,2n)$$

von $[a,b]$. Wendet man auf jedes Intervall $[x_{2(i-1)}, x_{2i}]$ $(i = 1,\dots,n)$ die Keplersche Fassregel (20.2) an, so erhält man die <u>Simpson-Regel</u>

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{6n}\Big(f(x_{2(i-1)}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\Big)$$

$$= \frac{b-a}{6n}\Big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b)\Big)$$

20.5 <u>Beispiele</u>

	$\int_0^1 x^2\,dx$	$\int_0^1 x^5\,dx$	$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$
Wirklicher Wert	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$	$\ln 2 \doteq 0{,}69$
Trapezregel	$\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$
Keplersche Fassregel	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}(0 + 4(\frac{1}{2})^5 + 1) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$	$\frac{1}{6}(1 + 4\,\frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{25}{36} = 0{,}69\overline{4}$