§ 21 Funktionenfolgen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$, die <u>punktweise auf D konvergiert</u>, d.h. $\forall x \in D$ existiere der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) .$$

Ist f stetig? Im Allgemeinen nicht: Für $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ ist

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \; ; & x \in [0,1[\\ 1 \; ; & x = 1 \end{cases} \quad \text{nicht stetig in } x = 1$$

21.1 Definition Seien $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Man sagt:

(f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen f $\left((f_n) \xrightarrow[\text{glm}]{n} f \right)$

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$

21.2 Beispiel (Potenzreihen)

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$

Dann konvergiert $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)_n \xrightarrow{n} f(x)$ glm. auf $[-r, r]$ $\forall r \in (0, R)$

Denn: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k r^k| < \varepsilon$ (9.3 + Bew. von 9.3)

$\Rightarrow \forall n \geq N$ gilt

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{|a_k x^k|}_{\leq |a_k r^k|} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k r^k| < \varepsilon$$

für alle $x \in [-r, +r]$.

21.3 Satz

$(f_n) \xrightarrow{n} f$ gleichmäßig auf D, f_n stetig $\forall n \Rightarrow f$ ist stetig

Bew: Sei $a \in D$ und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D$$

Da f_{n_0} stetig in a ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta$$

$\Rightarrow \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt

$$|f(x)-f(a)| \leq \underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(a)-f(a)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon \qquad \boxtimes$$

21.4 Satz Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ so, dass $(f_n) \xrightarrow{n} f$ gleichmäßig auf $[a,b]$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b f_n \, dx \right) \xrightarrow{(n\to\infty)} \int_a^b f \, dx$$

Beweis:

$$\left| \int_a^b f_n \, dx - \int_a^b f \, dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \, dx \right| \overset{17.10}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f_n - f|}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug}} dx$$

$$\leq \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon (b-a) \text{ für genügend große } n \qquad \boxtimes$$

21.5 Satz Sei (f_n) eine Folge stetig differenzierbarer Fkt'en $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in [a,b]$

(ii) (f_n') konvergiert glm. auf $[a,b]$ gegen eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar mit $f' = g$

Beweis: Nach Satz 21.3 ist g stetig und nach Satz 21.4 gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \underset{= 18.4}{\overset{HS}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x f_n' \, dt + f_n(a) \right)$$

$$= \int_a^x g \, dt + f(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow$ (Beweis des HS'es = 18.4) f ist differenzierbar und $f' = g$. $\boxtimes$

21.6 Korollar (Potenzreihen) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit KR $R > 0$

$\Rightarrow f :]-R, R[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \forall x \in]-R, R[$$

Insbesondere sind Potenzreihen ∞-oft differenzierbar (vgl. 13.9 + 13.10)

Beweis :

(1) Für $|x| < R$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \left(\left(\sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n \right)' \right)_{N \geq 0}$

Denn : Zu $|x| < R$ wähle $r \in (|x|, R)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |(n+1) a_{n+1} x^n| = \frac{1}{r} |a_{n+1} r^{n+1}| \, |\frac{x}{r}|^n (n+1)$

(Wegen $\frac{|x|}{r} \in [0,1)$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$ nach dem Quotientenkriterium = 8.10)

$\leq \underbrace{\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \frac{1}{r} \right)}_{< \infty} |a_{n+1} r^{n+1}|$

$\Rightarrow$ Nach dem Majorantenkriterium (8.8) konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ absolut.

(2) Die Funktionen $F_N :]-R, R[\to \mathbb{R}$, $F_N(x) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n$ konvergieren punktweise auf $]-R, R[$ gegen f. Nach (1) und Beispiel 21.2 konvergiert die Folge (F_N') glm. auf jedem Intervall $]-r, r[$ $(0 < r < R)$.

21.5 $\Rightarrow$ $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $f'(x) = \lim_{N \to \infty} F_N'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ für alle $x \in]-R, R[$.

$\boxtimes$

21.7 Beispiele (1) Nach 13.11(a) gilt für $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = -\ln \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Nach dem Leibnizkriterium (8.12) konvergiert die Reihe auch für $x = 1$.

(2) Für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)'.$$

Da zwei Stammfkt'en sich auf einem Intervall nur um eine Konstante unterscheiden können (14.6), folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Nach dem Leibnizkriterium (8.12) konvergiert die Reihe auch für $x = 1$

Frage: Gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln(1+1) = \ln 2$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$?

Der nächste Satz liefert eine positive Antwort.

21.8 Satz (Abelscher Grenzwertsatz)

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

$\Rightarrow$ Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hat den KR $R \geq 1$ (Kor. 9.4). Es gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Beweis: Forster, Analysis 1, Satz 5 in §22. ▨