§5 Angeordnete Körper

oder "Was man über Ungleichungen wissen sollte".

Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper.

5.1 <u>Definition</u> K zusammen mit einer Menge $P \subset K$ (man nennt die Elemente von P positiv und schreibt $x > 0$ statt $x \in P$) heißt <u>angeordneter Körper</u>, falls

(O1) Für jedes $x \in K$ gilt <u>genau einer der drei Fälle</u>

$$x > 0 \;, \quad -x > 0 \;, \quad x = 0$$

(O2) Für $x, y > 0$ ist auch $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$

Man schreibt:

$$x > y \text{ (oder } y < x) \;:\Longleftrightarrow\; x - y > 0$$

$$x \geq y \text{ (oder } y \leq x) \;:\Longleftrightarrow\; x > y \text{ oder } x = y \qquad (\text{Beachte: } y < 0 \Leftrightarrow -y > 0)$$

5.2 <u>Beispiele</u> $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ besitzen Anordnungen, endliche Körper nicht (5.7).

In angeordneten Körpern gilt:

5.3 <u>Regeln</u> Für $x, y, z \in K$ gilt

(1) $x \geq x$ (Reflexivität)

$x \geq y$ und $y \geq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

$x \geq y$ und $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (Transitivität)

(2) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Insbesondere gilt: $1 = 1^2 > 0$

(3) $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$

(4) $x \geq y,\; z \geq 0 \Rightarrow xz \geq yz$

$x \geq y,\; z \leq 0 \Rightarrow yz \geq xz$

$\Big\}$ bleibt richtig, wenn man überall "$\geq$" durch "$>$" und "$\leq$" durch "$<$" ersetzt

(5) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

(6) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

<u>Beweis</u> beispielhaft für (2): $x \neq 0 \overset{(O1)}{\Rightarrow} x > 0$ oder $-x > 0 \overset{(O2)}{\Rightarrow} x^2 = (-x)^2 > 0$

(4) $x \geq y,\ z \geq 0 \Rightarrow xz - yz = \underbrace{(x-y)}_{\geq 0}\underbrace{z}_{\geq 0} \geq 0$

$x \geq y,\ z \leq 0 \Rightarrow yz - xz = \underbrace{(x-y)}_{\geq 0}\underbrace{(-z)}_{\geq 0} \geq 0$

(5) Wäre $\frac{1}{x} \leq 0$, so würde aus (4) folgen $1 = x\frac{1}{x} \leq x \cdot 0 = 0$ # zu (2)

(6) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \underbrace{\frac{1}{x}\frac{1}{y}}_{\substack{>0 \\ \text{nach (5)}}}\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0$ ☒

5.4 <u>Folgerung</u> (Hausaufgabe)

(a) $x_j \leq y_j \ (j = 1,2) \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$

(b) $0 \leq x_j \leq y_j \ (j=1,2) \Rightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$

5.5 <u>Definition</u> Für $x \in K$ definiert man

$$|x| = \begin{cases} x\ ; & x \geq 0 \\ -x\ ; & x < 0 \end{cases}$$

(<u>Absolutbetrag</u> von x)

<u>Man sieht sofort</u>: $|x| = |-x| \geq 0$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$ und

$-c \leq x \leq c \Leftrightarrow |x| \leq c$

5.6 <u>Satz</u> Für $x, y \in K$ gilt

(a) $|x| \geq 0$ und $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

(b) $|xy| = |x|\,|y|$

(c) $\big||x| - |y|\big| \overset{(2)}{\leq} |x+y| \overset{(1)}{\leq} |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

<u>Beweis zu (c)</u> (1) $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$

$\overset{5.4(a)}{\Rightarrow} -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

$\Rightarrow |x+y| = \pm(x+y) \leq |x| + |y|$

(2) $|x| = |(x+y) + (-y)| \overset{(1)}{\leq} |x+y| + |y|$

Genauso: $|y| \leq |x+y| + |x|$

Also: $\pm(|x|-|y|) \leq |x+y|$ ☒

5.7 <u>Satz</u> Angeordnete Körper enthalten $\mathbb{N}$ (und können daher nicht endlich sein)

Genauer: $j: \mathbb{N} \to K,\ n \mapsto n \cdot 1_K = 1_K + 1_K + \ldots + 1_K$ (n-mal)

ist injektiv, denn für $n > m$ ist $n1_K - m1_K = (n-m)1_K \underset{(O2)}{>} 0$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$, d.h. $\mathbb{R}$ ist archimedisch:

5.8 <u>Definition</u> Ein angeordneter Körper heißt <u>archimedisch</u>, falls

$\forall x \in K\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $x < n\ (:= n1_K)$

<u>5.9 Satz</u> Sei K archimedisch angeordnet und seien $r, R \in K$ mit $0 < r < 1 < R$

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$

(b) $\forall a > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $R^n > a$

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $r^n < \varepsilon$

<u>Bew</u> (a) Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon} \overset{5.3(6)}{\Longrightarrow} \frac{1}{n} < \varepsilon$

(b) Sei $R > 1 \Rightarrow x := R-1 > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{a}{x}$

$$\Rightarrow R^n = (1+x)^n \underset{\text{für } 1.8}{\overset{\text{Bew. wie}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + nx > 1 + a > a$$

(c) Wende (b) an auf $R = \frac{1}{r} > 1$ und $a = \frac{1}{\varepsilon}$. ☒

<u>Intervalle</u>: Für $a, b \in K$ schreibt man

$[a,b] = \{x \in K;\ a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[a,b[= \{x \in K;\ a \le x < b\}$ }
$]a,b] = \{x \in K;\ a < x \le b\}$ } halboffene Intervalle

$]a,b[= \{x \in K;\ a < x < b\}$ offenes Intervall

5.10 Definition (a) Eine Menge $M \subset K$ heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls $\exists\, s \in K$ mit

$x \le s \ \forall x \in M$ (bzw. $x \ge s \ \forall x \in M$)

In diesem Fall heißt s obere (bzw. untere) Schranke von M

(b) M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist

(c) Ein Element $m \in M$ heißt Maximum (bzw. Minimum) von M (geschrieben: $m = \max M$ bzw. $m = \min M$), falls

$x \le m \ \forall x \in M$ (bzw. $x \ge m \ \forall x \in M$).

(d) Eine obere Schranke s von M heißt kleinste obere Schranke von M (Supremum), falls

t obere Schranke von $M \Rightarrow t \ge s$

Man schreibt $s = \sup M$ hierfür.

(e) Eine untere Schranke s von M heißt größte untere Schranke von M (Infimum) (geschrieben: $s = \inf M$), falls gilt

t untere Schranke von $M \Rightarrow t \le s$

Minima oder Maxima brauchen nicht zu existieren! Beispiel:

$M =]0,1[$ hat weder ein Minimum noch ein Maximum.

Wir werden später sehen:

Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (bzw. Infimum).