§ 7 Konvergenz von Folgen

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder allgemeiner:

7.1 Definition Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$ und ist für jedes $n \geq n_0$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ gegeben, so nennt man die Abbildung

$$\mathbb{Z}_{\geq n_0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

eine Folge in $\mathbb{R}$. Abkürzend schreibt man für solche Abbildungen

$$(a_n)_{n \geq n_0} \qquad \text{oder} \qquad (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$$

7.2 Beispiele (1) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$

(2) $a_n = q^n$ $(n \geq 0)$ für $q \in \mathbb{R}$ fest (geometrische Folge)

(3) Wie lauten die Bildungsgesetze für

$$(f_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots) \quad \text{(Fibonacci-Zahlen)},$$

$$(a_n)_{n \geq 1} = (2, 6, 7, 21, 22, 66, 67, \ldots) \quad ?$$

Die Folgen lassen sich rekursiv definieren durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_{n-1} + f_n \quad (n \geq 1),$$

$$a_1 := 2, \quad a_{n+1} := \begin{cases} 3a_n; & n \text{ ungerade} \\ a_n + 1; & n \text{ gerade} \end{cases}$$

7.3 Definition (Konvergenz)

(a) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ (geschrieben: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $(a_n) \xrightarrow{n} a$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 .$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert der Folge

(b) Die Folge (a_n) heißt divergent, falls (a_n) gegen keine reelle Zahl konvergiert.

7.4 Beispiele

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{n} 0$, denn zu $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ (5.8)

$$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon : \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \quad (\mathbb{R} \text{ ist archimedisch})$$

(2) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt $(q^n) \xrightarrow{n} 0$. Denn:

Sei $\varepsilon > 0 \overset{5.9(c)}{\Longrightarrow} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|q|^{n_0} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |q^n| = |q|^{n_0} \underbrace{|q|^{n-n_0}}_{\leq 1} \leq |q|^{n_0} < \varepsilon$$

(3) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right) \xrightarrow{n} 1$. Denn $\forall n \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{n^2+1}{n^2+2} - 1\right| = \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ (wie in (1))}$$

(4) $(a_n)_{n\geq 0} = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ divergiert. Denn für $a \in \mathbb{R}$ ist $\varepsilon := \max(|1-a|, |1+a|) > 0$

und $|(-1)^n - a| = \begin{cases} |1-a| \,;\; n \text{ gerade} \\ |1+a| \,;\; n \text{ ungerade} \end{cases} \geq \varepsilon$ für beliebig großen

7.5 Satz

Jede Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Wären $a \neq b$ Grenzwerte, so wäre $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$

und es müsste ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |a-b| = |(a - a_{n_0}) + (a_{n_0} - b)| \leq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - b| < 2\varepsilon = |a-b| \;\; \text{\#} \quad \blacksquare$$

7.6 Beispiele: Warum darf man so rechnen

(a) $$\frac{(n+2)(2n+3)}{n^2+3n+1} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n} \frac{(1+0)\cdot(2+0)}{1+0+0} = 2$$

(b) Für $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \overset{1.9}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \;?$$

7.7 Grenzwertsätze Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten a, b.

Dann gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) $b \neq 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \;\forall n \geq n_0$. Für jedes solche n_0 gilt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0} \xrightarrow{n} \frac{a}{b}.$$

__Beweis__ (i) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b|$$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq n_2$

$$\Rightarrow |(a_n + b_n) - (a+b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\forall n \geq \max(n_1, n_2).$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n||b_n - b| + |a_n - a|\,|b|$$

Wegen $(a_n) \xrightarrow{n} a$ $\exists$ zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \;\forall n \geq N$

$$\Rightarrow |a_n| = |(a_n - a) + a| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} 1 + |a| \;\forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq M := \max(|a_0|, \dots, |a_N|, 1 + |a|) \;\forall n \in \mathbb{N}$$

Zu $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq M|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\forall n \geq n_0$$

(iii) Sei $b \neq 0 \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \;\forall n \geq N$

$$\Rightarrow |b_n| = |b + (b_n - b)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2} > 0 \;\forall n \geq N$$

Wegen $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$ und (ii) genügt es z.z., dass

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \xrightarrow{n} \frac{1}{b}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $n \geq N$ gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = |b - b_n| \frac{1}{|b_n b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b - b_n| < \varepsilon$$

für n groß genug. $\blacksquare$

7.8 Definition Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt

(a) (nach oben, unten) beschränkt $:\Leftrightarrow$ $\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ (nach oben, unten) beschränkt

(b) (streng) monoton wachsend $:\Leftrightarrow$ $a_n \le a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ $\forall n\in\mathbb{N}$

(c) (streng) monoton fallend $:\Leftrightarrow$ $a_{n+1}\le a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

7.9 Bemerkung Man kann leicht zeigen:

(a_n) ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)$ ist nach oben beschränkt

7.10 Satz Konvergente Folgen sind beschränkt

Beweis: siehe Beweis von 7.7 (ii).

Kann man Folgen auf Konvergenz prüfen, ohne den Grenzwert zu kennen?

7.11 Definition Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge, falls

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a_m|<\varepsilon\ \ \forall n,m\ge n_0$

7.12 Bemerkung Konvergiert $(a_n)\xrightarrow{n} a$, so ist (a_n) Cauchy-Folge. Denn:

zu $\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall n\ge n_0$

$$\Rightarrow |a_n-a_m| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} |a_n-a|+|a-a_m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \ \forall n,m\ge n_0$$

Man kann $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ so konstruieren, dass

(i) jedes $x\in\mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge in $\mathbb{Q}$ ist ("$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$")

(ii) jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert hat ("$\mathbb{R}$ ist vollständig").

Zu lang für uns. Für uns ist $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper, in dem gilt:

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

7.13 Satz (Intervallschachtelungsprinzip = ISP)

Seien $\emptyset \neq I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ abgeschlossene Intervalle mit

$$I_n \supset I_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0$ gilt wegen $a_n, a_m \in I_n \cup I_m \subset I_{n_0}$

$$|a_n - a_m| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$$

$\overset{\text{Vollständigkeitsaxiom}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$

$\overset{7.7}{\Rightarrow}$ $b_n = \underbrace{a_n}_{\xrightarrow{n} x} + \underbrace{(b_n - a_n)}_{\xrightarrow{n} 0} \xrightarrow{n} x + 0 = x$

Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt ((a_n) wächst monoton, (b_n) fällt monoton).

$$a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_k = x = \lim_{k\to\infty} b_k \leq b_n$$

Also ist $x \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Ist auch $y \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$, so gilt $\forall n \geq 1$

$$|x - y| \leq b_n - a_n \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow |x - y| = 0, \text{ d.h. } x = y.$$

$\boxtimes$

Die Folge $((-1)^n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent. Die Punkte ± 1 haben die Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder existieren, die Abstand kleiner ε zu diesen Zahlen haben.

7.14 Korollar (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. $\Rightarrow$ $\exists$ mindestens ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\forall \varepsilon > 0$

$$|\{n \in \mathbb{N};\ |a_n - a| < \varepsilon\}| = \infty.$$

Beweis: Wähle $I_1 = [c_1, d_1]$ mit $a_n \in I_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Eine der beiden Hälften $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]$, $[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.

Wähle I_2 als eine solche Hälfte

...

Rekursiv erhält man Intervalle $I_n = [c_n, d_n]$ $(n \geq 1)$ so, dass $\forall n \geq 1$ gilt

$I_n \supset I_{n+1}$, Länge $(I_{n+1}) = \frac{1}{2}$ Länge (I_n),

$|\{k \in \mathbb{N};\ a_k \in I_n\}| = \infty$

$\overset{\text{ISP}=7.13}{\Rightarrow}$ $\exists\ a \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < c_{n_0} \leq d_{n_0} < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |\{n \in \mathbb{N};\ |a_n - a| < \varepsilon\}| = \infty$. ☒

7.15 Korollar Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert

Beweis: Wähle eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ zu (a_n) wie in 7.14.

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \in\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

Sei $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ zu n gibt es ein $n_1 \geq n$ mit $a_{n_1} \in\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a_{n_1} < a + \varepsilon$. ☒

Genauso folgt, dass monoton fallende beschränkte Folgen konvergieren.

7.16 Definition Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n)

$:\Leftrightarrow |\{n \in \mathbb{N};\ |a_n - a| < \varepsilon\}| = \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ hat Häufungspunkte ± 1.

Bolzano-Weierstraß (7.14) besagt:

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sind $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ natürliche Zahlen, so heißt $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ Teilfolge von (a_n).

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ hat Häufungspunkte ± 1 und

$((-1)^{2i})_{i\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\dots)$ (mit $n_i = 2i$)

$((-1)^{2i+1})_{i\in\mathbb{N}} = (-1,-1,-1,\dots)$ (mit $n_i = 2i+1$)

sind Teilfolgen von (a_n) mit Grenzwerten ± 1. Dies ist kein Zufall!

Man kann sehr einfach zeigen: a ist Häufungspunkt von (a_n)

$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$

7.17 Umformulierung von Bolzano-Weierstraß:

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

7.18 Landausche Symbole

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $b_n \neq 0\ \forall n$. Man schreibt:

$a_n = O(b_n)$ (oder $(a_n) \in O(b_n)$) $:\Leftrightarrow$ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ist beschränkt

($\Leftrightarrow \exists\, c > 0$ mit $|a_n| \leq c\,|b_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$)

$a_n = o(b_n)$ (oder $(a_n) \in o(b_n)$) $:\Leftrightarrow$ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \xrightarrow{n} 0$

Beispiele: (1) $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, denn $\frac{1}{n^2} / \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$

(2) $\forall r \in \mathbb{R}$ ist $\left(\frac{1}{n+r}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, denn $\frac{1}{n+r} / \frac{1}{n} = \frac{n}{n+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{n}} \xrightarrow{n} 1$

(3) Sei $a_n = 3n^5 + n^4 - n^2 + 1$. Dann ist

$a_n = O(n^5)$, denn $\frac{a_n}{n^5} = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} \xrightarrow{n} 3$

$a_n = 3n^5 + o(n^5)$, denn $\frac{n^4 - n^2 + 1}{n^5} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} \xrightarrow{n} 0$

Konvergente Folgen und Cauchy-Folgen kann man ganz genauso in $\mathbb{C}$ definieren. Man überlegt sich sehr einfach:

(1) Die Grenzwertsätze (7.7) bleiben richtig in $\mathbb{C}$.

(2) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist konvergent (Cauchy) in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ konvergent (Cauchy) in $\mathbb{R}$ sind.
(Der Beweis folgt aus den Ungleichungen

$$|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \forall z \in \mathbb{C} \,)$$

(3) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist ($\mathbb{C}$ ist vollständig!)