§ 8 Reihen (Unendliche Summen)

Paradoxon von Zenon (490 – 430 v. Chr.)

Achilles ist n-mal so schnell wie die Schildkröte

Vorsprung der S.: a

Zeit, die A. für die Strecke a benötigt: t

Zeit	t	$t + \frac{t}{n}$	$t + \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2}$
Weg des A.	a	$a + \frac{a}{n}$	$a + \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2}$
Vorsprung der S.	$\frac{a}{n}$	$\frac{a}{n^2}$	$\frac{a}{n^3}$

Zenon: " $t + \frac{t}{n} + \frac{t}{n^2} + \frac{t}{n^3} + \dots = \infty$ "

Wir wissen (Beispiel 7.6 (b)):

$$t_k := t + \frac{t}{n} + \dots + \frac{t}{n^k} = t \, \frac{1 - (\frac{1}{n})^{k+1}}{1 - \frac{1}{n}} \xrightarrow{(k \to \infty)} \frac{t}{1 - \frac{1}{n}}$$

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

8.1 Definition (a) Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n\text{-te } \underline{\text{Partialsumme}})$$

und setze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

(b) Ist $c \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c \;:\Leftrightarrow\; \lim_{n \to \infty} s_n = c$$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u> $:\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

8.2 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so, dass}$$

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall q \geq p \geq n_0$$

Beweis: Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Da für $q \geq p > 0$ gilt

$$s_q - s_{p-1} = \sum_{k=p}^{q} a_k ,$$

folgt die Behauptung aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen (§7). ▨

8.3 Folgerungen

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Umkehrung ist falsch: 8.4(b))

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

Beweis:

(a) Nach 8.2 ist $|a_p| = \left| \sum_{k=p}^{p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall p \geq n_0$

(b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ (Cauchy-Kriterium = 8.2 angewendet auf $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=p}^{q} |a_k| < \varepsilon \quad \forall q \geq p \geq n_0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |a_k| < \varepsilon \quad \forall q \geq p \geq n_0$$

Nach dem Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist diese Reihe konvergent ▨

8.4 Beispiele

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$ (oder $q \in \mathbb{C}$). Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad \text{(Geometrische Reihe)}$$

konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist

Für $|q| \geq 1$ ist $|q^n| = |q|^n \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \overset{8.3(a)}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert

Für $|q| < 1$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{(n \to \infty)} \frac{1}{1-q}.$$

Also gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

(b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \xrightarrow{n} 0$, aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmonische Reihe) divergiert. Sei

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig, $p > N$ und $q = 2p$

$$\Rightarrow |s_q - s_p| = \underbrace{\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{2p}}_{p \text{ Summanden } \geq \frac{1}{2p}} \geq p \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist das Cauchy-Kriterium für (s_n) verletzt!

8.5 Rechenregeln Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (c\, a_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

[$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \xrightarrow{n} a + b$ nach den GWS'en (7.7)]

8.6 Beispiel (b-adische Entwicklung)

Sei $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Ein b-adischer Bruch ist eine Reihe der Form

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Für festgelegtes b schreibt man auch

$$\pm a_{-k} a_{-k+1} \cdots a_{-1} a_0 , a_1 a_2 a_3 \ldots := \pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}.$$

Die Partialsummenfolge

$$(s_N)_{N \geq -k} = \left(\sum_{n=-k}^{N} a_n b^{-n} \right)_{N \geq -k}$$

ist monoton wachsend und beschränkt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b^{-n} \leq b \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{b}\right)^n \leq b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{b}{1-\frac{1}{b}} < \infty .$$

Also folgt aus Korollar 7.15 :

8.6 Satz Jeder b-adische Bruch $\sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ konvergiert gegen eine reelle Zahl.

Jede reelle Zahl lässt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln (Forster, Analysis I, Satz 3 in §5). Aber die Entwicklung ist nicht eindeutig:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b-1) b^{-n} = (b-1) \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = b = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n b^{-n} \quad \left(a_n = \begin{cases} 1, & n=-1 \\ 0, & n>-1 \end{cases} \right)$$

(oder für $b = 10$ ist $0,999\ldots = 0,\bar{9} = 1,0$)

Konvergenzkriterien für Reihen

8.7 Satz Seien $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt} \quad \left(\iff: \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty\right)$$

Bew: Nach Korollar 7.15 ist eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. ▨

8.8 Satz (Majorantenkriterium) Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) so, dass $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $N \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$|a_n| \leq c\, |b_n| \quad \forall n \geq N$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ absolut konvergent} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent (abs. konvergent)}.$$

Beweis: Die Beh. folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium (8.2), denn

$$\sum_{k=p}^{q} |a_k| \le c \sum_{k=p}^{q} |b_k| \quad \forall\, q \ge p \ge N.$$ $\boxtimes$

8.9 Beispiel Für $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Denn

$$n^2 + n \le 2n^2 \quad \text{für } n \ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{n^2+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N} 1$$

$$\Rightarrow \text{(Majorantenkriterium = 8.8)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ konvergiert}$$

8.10 Satz (Quotientenkriterium) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) so, dass $q \in [0,1[$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$|a_{n+1}| \le q\, |a_n| \quad \forall\, n \ge N$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent (also konvergent).

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn $a_n \ne 0 \ \forall\, n \ge N$ ist und

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \text{existiert.}$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{N+n}| \le q\,|a_{N+n-1}| \le q^2\,|a_{N+n-2}| \le \dots \le q^n\,|a_N|$$

$$\Rightarrow \text{(Majorantenkriterium = 8.8)} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{N+n}| < \infty \quad (\Leftrightarrow \text{Partialsummen sind beschränkt})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

Ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \ \ \forall\, n \ge N \Rightarrow |a_{n+1}| \le q\,|a_n| \ \ \forall\, n \ge N$$ $\boxtimes$

8.11 Beispiele

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Big/ \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow{n} \frac{1}{2} \in [0,1)$

$\Rightarrow$ (Quotientenkriterium = 8.10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert

(b) Für die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genügt es nicht, dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \ \forall n$ gilt:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, aber $\left|\frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \geq 1$

(c) Gibt es ein $R > 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > R \ \forall n \geq N$ (dies ist z. B. erfüllt, wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ist), so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$|a_{N+n}| \geq R\,|a_{N+n-1}| \geq \ldots \geq R^n\,|a_N| \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty$$

Für $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ kann man nichts über die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sagen!

(d) (Wurzelkriterium) Existiert $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und ist $L < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Ist $L > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(Für $L < q < 1$ ist $|a_n| < q^n$ für genügend große n. Für $L > 1$ ist $|a_n| > 1$ für genügend große n).

8.12 Satz (Leibnizkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert

Beispiele

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots \quad (= \ln 2) \text{ konvergiert}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots \quad \left(= \frac{\pi}{4}\right) \text{ konvergiert}$$

Aus dem Satz folgt nur die Konvergenz der Reihen! Die Berechnung der Grenzwerte ist viel schwieriger! (Vielleicht später)

Beweis von Satz 8.12: Die Folge der "ungeraden" Partialsummen

$$s_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_{2k} - a_{2k+1})}_{\geq 0} \leq \sum_{k=0}^{n+1} (a_{2k} - a_{2k+1}) = s_{2n+3}$$

ist monoton wachsend, die Folge der "geraden" Partialsummen

$$s_{2n} \geq s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} = s_{2(n+1)}$$

monoton fallend. Wegen

$$s_{2n} = s_{2n+1} + \underbrace{(s_{2n} - s_{2n+1})}_{= a_{2n+1} \xrightarrow{n} 0} \geq s_1 + a_{2n+1} \xrightarrow{n} s_1$$

ist (s_{2n}) monoton fallend und beschränkt

$\Rightarrow \quad s = \lim_{n \to \infty} s_{2n}$ existiert

$\Rightarrow \quad s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \xrightarrow{n} s - 0 = s$

$\Rightarrow \quad (s_n)_{n \geq 0} = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots) \xrightarrow{n} s.$ ☒

Umordnung von Reihen

Der Wert einer endlichen Summe hängt nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

Für Reihen ist dies falsch! Beispiel:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \in \mathbb{R}$$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium (8.12)

Würde auch die umsortierte Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots$$

gegen s konvergieren, so wäre auch

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right)$$ (Partialsummenfolge hiervon ist Teilfolge von ...)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)}^{\geq 0}}_{\text{Teilfolge von } \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{2} s$$

Dies ist nicht möglich, denn $s \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. #

Positive Resultate

8.13 Satz Sei $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

$$\Rightarrow \quad s = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \text{ und die Reihe konvergiert absolut}$$

Beweis: Absolute Konvergenz: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=0}^{\max(\varphi(0),\dots,\varphi(n))} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

$$\overset{8.7}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} \text{ konvergiert absolut.}$$

Reihenwert: Zu $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \left(\sum_{k=0}^{n_0} a_k \right) - s \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{0,\dots,n_0\} \subset \{\varphi(0),\dots,\varphi(N)\}$

$$\Rightarrow \forall\, n \geq N: \left| \left(\sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} \right) - s \right| \leq \left| \left(\sum_{k=0}^{n_0} a_k \right) - s \right| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \boxtimes$$

Man kann zeigen:

8.14 Satz (Großer Umordnungssatz) Seien $a_{jk} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) für $j,k \in \mathbb{N}$.

Es gebe ein $M > 0$ mit $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} |a_{jk}| \leq M \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

absolut, und der Reihenwert s ist unabhängig von φ.

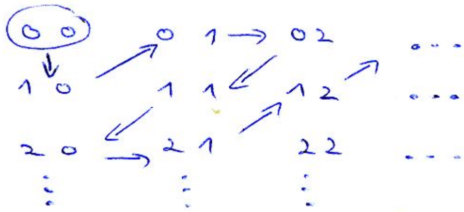
(b) Für alle $j,k \in \mathbb{N}$ konvergieren $\sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}$ absolut.

(c) $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} \right)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right)$ konvergieren absolut und haben beide den Wert s.

8.15 Folgerungen

(a) Seien $a_{jk} \in \mathbb{C}$ $(j,k) \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{j,k=0}^{m} |a_{jk}| \leq M < \infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Indem man Satz 8.14(a) auf die Diagonalabzählg $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$



anwendet, erhält man, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_{pq}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}\right),$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren.

(b) Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) \quad \text{(Cauchy-Produkt der beiden Reihen)}$$

und die Reihe rechts konvergiert absolut. Zum Beweis wende (a) an auf

$$a_{jk} = a_j b_k .$$

Beachte dabei, dass $\sum\limits_{j,k=0}^{m} |a_{jk}| = \left(\sum\limits_{j=0}^{m} |a_j|\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{m} |b_k|\right)$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right) =: M < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(c) Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut nach dem Quotientenkriterium (8.10)

$$\overset{(b)}{\Longrightarrow} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\,\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{j!\,(n-j)!}}_{\binom{n}{j}} z^j w^{n-j}\right)}_{(z+w)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$