§ 9 Potenzreihen

oder " Was kann man über Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sagen? "

9.1 Definition Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

mit $a_n, x \in \mathbb{R}$ heißt Potenzreihe mit Koeffizienten a_n und Entwicklungszentrum x_0.

Frage: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Im Folgenden sei stets $x_0 = 0$.

9.2 Beispiele

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (d.h. $a_n = 1$) konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ($x \in \mathbb{C}$ mit $|x|<1$) (8.4)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\left(a_n = \frac{1}{n!}\right)$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ $(a_n = n)$

} Konvergenzbereiche?

9.3 Satz Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in einem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}$, so konvergiert sie in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_1|$.

Beweis: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ konvergent, so folgt $(a_n x_1^n) \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$ (8.3(a))

7.10 $\Rightarrow$ $\exists M > 0$ mit $|a_n x_1^n| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Für $|x| < |x_1|$ folgt wegen

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le M \underbrace{\left|\frac{x}{x_1}\right|}_{<1}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mit dem Majorantenkriterium (8.8) die absolute Konvergenz. ▨

9.4 <u>Korollar</u> Die Menge

$$I := \{x \in \mathbb{R} ;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$$

enthält mit jeder Zahl $x_1 \in \mathbb{R}$ auch jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_1|$.

Es gibt ein $R \in [0,\infty]$ $(= \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ so, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert für } |x| < R \text{ und divergiert für } |x| > R$$

(Begründung in §10). Man nennt R den <u>Konvergenzradius</u> (KR) der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Über das Verhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in $x = \pm R$ lässt sich allgemein nichts sagen.

9.5 <u>Beispiele</u>

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat KR $R = 1$ (Beispiel 8.4)

(2) Für $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \in [0,1[$$

$\Rightarrow$ Nach dem Quotientenkriterium (8.10) konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ KR von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist $R = \infty$

(3) Für $x \in \mathbb{R}^*$ ist

$$\left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = (n+1)|x| \xrightarrow{(n\to\infty)} \infty \quad \left(\text{soll heißen: } \forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } (n+1)|x| > R\ \ \forall n \geq n_0 \right)$$

$\Rightarrow$ (Divergenzkriterium = 8.11(c)) KR von $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ ist $R = 0$

(4) Für $x \in \mathbb{R}^*$ ist

$$\left| \frac{(n+1)\, x^{n+1}}{n\, x^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x| \xrightarrow{(n\to\infty)} |x| \overset{8.10}{\underset{8.11(c)}{\Longrightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \begin{cases} \text{konvergiert für } |x| < 1 \\ \text{divergiert für } |x| > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ KR von $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ ist $R = 1$.

9.6 <u>Definition</u> Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Man definiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n > R\ \ \forall n \geq n_0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall R > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n < -R\ \ \forall n \geq n_0$$

9.7 Satz (a) Gilt $a_n \neq 0$ ab einem Index N und existiert

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0,\infty],$$

so ist R der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(b) Existiert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,\infty]$, so ist

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{0} := \infty, \ \frac{1}{\infty} := 0\right)$$

der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Beweis: (a) folgt aus dem Quotientenkriterium (8.10) und Divergenzkriterium (8.11c.)

(b) Hachenberger, Satz 16.2.4. $\boxtimes$

Man kann zeigen (Später!)

9.8 Satz (Binomialreihe) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}_{=:\binom{\alpha}{n}} x^n$$

Beweis für die Konvergenz der Reihe:

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $\binom{\alpha}{n} = 0$ für $n > \alpha$ und

$$\sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \qquad (\text{Binomialsatz} = \text{Satz } 1.8)$$

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist

$$\left|\binom{\alpha}{n} \Big/ \binom{\alpha}{n+1}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)} \frac{(n+1)!}{n!}\right|$$

$$= \frac{n+1}{|\alpha-n|} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left|\frac{\alpha}{n}-1\right|} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1.$$

Also ist der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ gleich 1 nach Satz 9.7(a). $\boxtimes$

Alles in § 9 bleibt richtig, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt,

das heißt, Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n, z \in \mathbb{C}$ betrachtet.

In diesem Fall gilt für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$, divergiert $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\[2ex] \cdot\ R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{array}\right\} \text{ falls diese Grenzwerte existieren.}$$