



Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I
Wintersemester 2011/2012

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 13.01.2012

Aufgabe 36

(1+1+1+1=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $x, y > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

- (i) $x^a y^a = (xy)^a$,
- (ii) $x^a x^b = x^{a+b}$,
- (iii) $(x^a)^b = x^{ab}$,
- (iv) $1^a = 1$ und $x^0 = 1$.

Aufgabe 37

(2+2=4 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. Begründen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto a^x$$

bijektiv ist.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

und dass

$$\log_a(x) = \log_b(x) \log_a(b).$$

Aufgabe 38

(4 Punkte)

Für $t \in \mathbb{R}$ seien $\cos t, \sin t$ wie in der Vorlesung definiert durch

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t = \operatorname{Im}(e^{it}),$$

wobei $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sei für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(s \pm t) &= \cos s \cos t \mp \sin s \sin t, \\ \sin(s \pm t) &= \sin s \cos t \pm \cos s \sin t. \end{aligned}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 39***(4* Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| \leq 1$ gilt

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|e.$$

(Hinweis: Argumentieren Sie wie im Beweis von Satz 12.1 (ii).)

Hinweise:

Neben den bereits bekannten Zulassungsbedingungen ist für die Hauptklausur eine Anmeldung über das HISPOS-System verpflichtend. Diese kann bis zwei Wochen vor der Hauptklausur vorgenommen und/oder widerrufen werden.

Als **einziges** Hilfsmittel ist bei den Klausuren ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt, Vorder- und Rückseite, erlaubt. Darüber hinausgehende Hilfsmittel, insbesondere Vorlesungsmitschriften, Bücher oder Taschenrechner, sind nicht erlaubt.

*Wir Wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten
Start ins neue Jahr!!!*