UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Wintersemester 2011/2012

Blatt 11 Abgabetermin: Freitag, 20.01.2012

Aufgabe 40 (1+1+1+1=4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
&(i) && f_1 : (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln(x)),\\
&(ii) && f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{x^4} e^{4x^2+3x+3},\\
&(iii) && f_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right),\\
&(iv) && f_4 : (0,\infty) \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^{\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 41 (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sind $f_1, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar, so gilt:

$$(\ln(f_1 \cdots f_n))' = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i\prime}{f_i}.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, lautet die n-te Ableitung von $\sqrt{2x}$

$$(-1)^{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \right) (2x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad (x > 0).$$

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, aber die Ableitung f' unstetig ist in $x = 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 43 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right),$$

$$(ii) \quad \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}.$$

(*Hinweis: Schreiben Sie die Folgenglieder als Differenzenquotienten.*)

(b) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(*Hinweis: Schreiben Sie* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *als Differenzenquotient.*)

Aufgabe 44* **(1*+1*+2*=4* Punkte)**

Beweisen Sie die Gültigkeit der Formeln

$$(i)^* \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad (n\geq 1),$$

$$(ii)^* \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0 \quad (n\geq 2),$$

$$(iii)^* \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \quad (n\geq 2).$$

Differenzieren Sie dazu die Funktion $(1+x)^n$.

Aufgabe 45* **(4* Punkte)**

Seien $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]a,b[$ und seien $f(x_0) = 0 = g(x_0)$, $g'(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Hinweise:

Neben den bereits bekannten Zulassungsbedingungen ist für die Hauptklausur eine Anmeldung über das HISPOS-System verpflichtend. Diese kann bis zwei Wochen vor der Hauptklausur vorgenommen und/oder widerrufen werden.

Als **einziges** Hilfsmittel ist bei den Klausuren ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt, Vorder- und Rückseite, erlaubt. Darüber hinausgehende Hilfsmittel, insbesondere Vorlesungsmitschriften, Bücher oder Taschenrechner, sind nicht erlaubt.
