UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Wintersemester 2011/2012

Blatt 4 Abgabetermin: Freitag, 18.11.2011

Aufgabe 13 (1+1+2=4 Punkte)

Seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) $a|b$ und $b|c \;\Rightarrow\; a|c$.

(ii) $a|a_i$ für $i = 1, \ldots, r \;\Rightarrow\; a|\sum_{i=1}^{r} u_i a_i$ für alle $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a|bc \;\Rightarrow\; a|c$.

Endlich viele ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ heißen teilerfremd*, falls $ggT(a_1, \ldots, a_r) = 1$.*

Aufgabe 14 (2+2+2=6 Punkte)

Seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $r \geq 2$ und $d = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_{r-1})$, so ist $\mathrm{ggT}(d, a_r) = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_r)$.

(b) $a_1, \ldots, a_r$ besitzen einen größten gemeinsamen Teiler (In der Vorlesung wurde dies nur für den Fall $r = 2$ begründet).

(c) $a_1, \ldots, a_r$ sind teilerfremd $\Leftrightarrow\; \exists u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{Z}$ mit $1 = \sum_{i=1}^{r} u_i a_i$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Ein chinesischer Schäfer hat eine Herde von höchstens 200 Tieren. Um sie exakt zu zählen, lässt er sie des Abends immer zu zweit durch ein Gatter laufen und stellt fest, dass ein Tier übrig bleibt. Am nächsten Abend lässt er die Tiere immer zu dritt durchs Gatter laufen und stellt ebenfalls fest, dass eins übrig bleibt. Am dritten Tage macht er dasselbe mit 5 Schafen und stellt wieder fest, dass eines übrig bleibt. Am vierten Abend schlielich lässt er 7 Schafe auf einmal durchs Gatter und es bleibt kein Schaf übrig. Wie groß ist die Herde?

(bitte wenden)

Aufgabe 16 **(4+2* Punkte)**

(a) Seien $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ teilerfremd. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z}/nm \to \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m, \; [x]_{nm} \mapsto ([x]_n, [x]_m)$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Rechts sind die Äquivalenzklassen von x in $\mathbb{Z}/nm$, $\mathbb{Z}/n$ und $\mathbb{Z}/m$ gemeint.

(b)* Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ggT}(x, n) = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists \bar{y} \in \mathbb{Z}/n \text{ mit } \bar{x}\bar{y} = \bar{1}.$$