UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Wintersemester 2011/2012

Blatt 6 Abgabetermin: Freitag, 02.12.2011

Aufgabe 21 (1+1+1+1=4 Punkte)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
&(i) && \frac{n^2+1}{n^5-2n^3+3},\\
&(ii) && \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\\
&(iii) && \frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2},\\
&(iv) && \frac{(n+1)^3-n^3}{n^2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 22 (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $q \in]0,1[$ und $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_{n+1} \leq qa_n$ für alle $n \geq N$ konvergiert gegen 0.

(b) Zeigen Sie als Anwendung von Teil (a), dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Aufgabe 23 (2+1+1=4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie:

(i) Ist $a_n \geq 0$ für alle n, so ist $a \geq 0$.

(ii) Ist $a_n \geq b_n$ für alle n, so ist $a \geq b$.

(iii) Aus $a_n > b_n$ für alle n kann man nicht schließen, dass $a > b$ ist.

Aufgabe 24 (2+2+2=6 Punkte)

Seien $a, x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie:

(i) $x_n \geq \sqrt{a}\ \forall n \geq 1$.

(*Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass* $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *gilt.*)

(ii) $(x_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.

(iii) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert und $x^2 = a$.

(*Hinweis: Benutzen Sie dabei beide Seiten der definierenden Gleichung für* x_{n+1}.)

(bitte wenden)

Hinweis:

Es gibt keine Zulassungsbeschränkung für die Zwischenklausur. Die Teilnahme an der Zwischenklausur ist eine notwendige Bedingung zur Erfüllung der Scheinmodalitäten. Die Anmeldung erfolgt in den kommenden Wochen in den Übungsgruppen.

Neben den bereits bekannten Zulassungsbedingungen ist für die Hauptklausur eine Anmeldung über das HISPOS-System verpflichtend. Diese kann bis zwei Wochen vor der Hauptklausur vorgenommen und/oder widerrufen werden.