**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

# Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Wintersemester 2011/2012

**Blatt zur Vorbereitung auf die Klausur** Abgabetermin: /

---

### Aufgabe 1

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

---

### Aufgabe 2

Sei $p$ eine Primzahl und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \bmod p.$$

---

### Aufgabe 3

Seien $a_0, b_0 \in [0, \infty)$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Zeigen sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\geq 0},\ (b_n)_{n\geq 0}$ konvergieren und dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ist.

(*Hinweis: Aufgabe 24.*)

---

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Reihen konvergieren

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1},$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (x+2)^n.$$

---

### Aufgabe 5

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = xf(x)$ stetig in 0 ist und dass die Funktion $h : [0,1] \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2 f(x)$ differenzierbar in 0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass $|x| \leq |\tan(x)|$ für alle $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt.

---

**(bitte wenden)**

## Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle geraden natürlichen Zahlen $n$.

---

## Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)},$$

$$(b) \quad \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}},$$

$$(c) \quad \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}.$$

---

## Aufgabe 8

(a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{\ln(-x)}{x}.$$

(b) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie, dass ein $t \in ]a, b[$ existiert mit $f'(t) = g'(t)f(t)$.

(*Hinweis: Betrachte* $F(x) = f(x)e^{-g(x)}$.)

---

## Aufgabe 9

Berechnen Sie folgende Integrale

$$(a) \quad \int_0^1 x^2 e^{-x} dx,$$

$$(b) \quad \int_1^e \cos\left(\frac{\pi}{2} \ln(x)\right) dx,$$

$$(c) \quad \int_0^1 \frac{2x-3}{2x+1} dx.$$

---

## Hinweise:

Als **einziges** Hilfsmittel ist bei den Klausuren ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt, Vorder- und Rückseite, erlaubt. Darüber hinausgehende Hilfsmittel, insbesondere Vorlesungsmitschriften, Bücher oder Taschenrechner, sind nicht erlaubt.

---