Aufgabe 1 **(3+3=6 Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$(b) \quad \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ die Zahl $5^n + 7$ durch 4 teilbar ist.

(*Hinweis:* $5 = 4 + 1$.)

Aufgabe 3 **(3+4=7 Punkte)**

Sei $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ und $x_n = x_{n-1}^2 + \frac{1}{4}$ für $n \geq 1$.

(a) Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ auf Monotonie.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 4 **(4+4=8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Reihen konvergieren:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2},$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Aufgabe 5 **(3+3=6 Punkte)**

Gegeben seien Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Sei g stetig in 0, f differenzierbar in 0 mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass fg differenzierbar in 0 ist mit $(fg)'(0) = f'(0)g(0)$.

(b) Sei $-x^2 \leq h(x) \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass h differenzierbar ist im Punkt 0 und berechnen Sie $h'(0)$.

Aufgabe 6 **(2+3+3=8 Punkte)**

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

$$(a) \quad f(x) = \cos(2e^x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(b) \quad g(x) = x^{(x^2)} \quad (x > 0),$$

$$(c) \quad h(x) = \arctan \sqrt{x^4 - 1} \quad (|x| > 1).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 7 **(2+2+3=7 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2(x-2)(x+3)}{(x^2-4)(x+5)},\\
&(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^3)}-1}{x},\\
&(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8 **(3+4=7 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die lokalen Extrema der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+1.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y > 0$ gilt

$$e^x(x-y) > e^x - e^y > e^y(x-y).$$

Aufgabe 9 **(2+2+3=7 Punkte)**

Berechnen Sie die Integrale

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)dx,\\
&(b) \quad \int_0^1 \frac{x^2+4}{x^2+1}dx,\\
&(c) \quad \int_e^{e^e} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}.
\end{aligned}
$$

Viel Erfolg!!!