

Aufgabe 1**(4 Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Aufgabe 2**(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ die Zahl $7^n + 11$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 3**(3+3=6 Punkte)**

Sei $x_1 \in (0, \infty)$ und $x_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) x_n$ für $n \geq 1$.

(a) Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ auf Monotonie.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4**(4+4=8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Reihen konvergieren:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}},$$
$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^n}.$$

Aufgabe 5**(6 Punkte)**

Untersuchen Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs. Berechnen Sie die Ableitung von f in jedem Punkt, in dem sie existiert.

Aufgabe 6**(2+3+4=9 Punkte)**

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$(b) \quad g(x) = e^x \sin(\cos(x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$(c) \quad h(x) = \ln(1+x^x) \quad (x > 0).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 7**(2+2+3=7 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(x)},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x) + x},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$
-

Aufgabe 8**(3+3=6 Punkte)**Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^{-x^2}$

- (a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die lokalen Extrema von f .
- (b) Gibt es Stellen, an denen f ein absolutes Minimum bzw. Maximum besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.
-

Aufgabe 9**(2+2+2=6 Punkte)**

Berechnen Sie die Integrale

- (a) $\int_0^1 t^2 e^t dt,$
- (b) $\int_0^1 t e^{(t^2)} dt,$
- (c) $\int_0^1 \frac{t+5}{t+3} dt.$
-

Viel Erfolg!!!