

**Aufgabe 1****(4 Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} > \frac{13}{24}.$$

---

**Aufgabe 2****(5+3=8 Punkte)**

Stellen Sie für die folgenden Aussagen die Wahrheitstafeln auf und entscheiden Sie, ob es sich um Tautologien handelt:

(a)  $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \Rightarrow Z),$

(b)  $(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow B).$

---

**Aufgabe 3****(2+2+3=7 Punkte)**

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind  $f$  und  $g$  injektiv, so ist  $g \circ f$  injektiv.

(b) Sind  $f$  und  $g$  surjektiv, so ist  $g \circ f$  surjektiv.

(c) Sind  $f$  und  $g$  bijektiv, so ist  $g \circ f$  bijektiv und es gilt  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$

---

**Aufgabe 4****(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl  $3^{(2^n)} - 1$  durch  $2^n$  teilbar ist.

---

**Aufgabe 5****(8 Punkte)**

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler  $d = \text{ggT}(99, 78)$  und ganze Zahlen  $u, v \in \mathbb{Z}$  mit  $d = u \cdot 99 + v \cdot 78.$

---

**Aufgabe 6****(6 Punkte)**

Bestimmen Sie die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$  für die gilt

$$|2x - 1| > |4x - 6|.$$

---

**(bitte wenden)**

**Aufgabe 7****(4+2+3=9 Punkte)**

Seien  $a_0 = \frac{1}{2}$  und  $a_{n+1} = (2 - a_n)a_n$  für  $n \geq 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $0 < a_n < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
  - (b) Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.
  - (c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 

**Aufgabe 8****(2+2+2=6 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

- (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n+200},$
  - (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7+3^n},$
  - (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$
- 

**Aufgabe 9****(3+2+3=8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , in denen die folgenden Reihen konvergieren:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n,$
  - (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n},$
  - (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+|x|}.$
- 

*Viel Erfolg!!!*