Das Tensorprodukt

Seien E, F k-Vektorräume. Dann ist

$$E \circ F := \{u : E \times F \to k;\ u(x, y) = 0 \text{ für fast alle } (x, y) \in E \times F\}$$

ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Abbildungen von $E \times F$ nach k. Für $(x_0, y_0) \in E \times F$ sei $x_0 \circ y_0 \in E \circ F$ definiert durch

$$(x_0 \circ y_0)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (x, y) = (x_0, y_0) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad ((x, y) \in E \times F).$$

Ist nun $N \subset E \circ F$ die lineare Hülle der Elemente

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2) \circ y - x_1 \circ y - x_2 \circ y, \\ &(\alpha x) \circ y - \alpha(x \circ y), \\ &x \circ (y_1 + y_2) - x \circ y_1 - x \circ y_2 \quad \text{und} \\ &x \circ (\alpha y) - \alpha(x \circ y) \qquad\qquad (x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F, \alpha \in k), \end{aligned}$$

so nennen wir den Vektorraum

$$E \otimes F := E \circ F / N$$

das Tensorprodukt der Vektorräume E und F. Für $x \in E$ und $y \in F$ definieren wir ferner $x \otimes y := [x \circ y] \in E \otimes F$ und beachten, dass $E \otimes F = \operatorname{span}\{x \otimes y;\ x \in E, y \in F\}$ ist.

Lemma. *Seien $E, F, G, E_1, E_2, F_1, F_2$ k-Vektorräume.*

(a) Die Abbildung $E \times F \to E \otimes F$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ ist bilinear, und zu jeder bilinearen Abbildung $B : E \times F \to G$ existiert genau eine lineare Abbildung $\dot{B} : E \otimes F \to G$ mit

$$B(x, y) = \dot{B}(x \otimes y)$$

für alle $(x, y) \in E \times F$.

(b) Sind $T : E_1 \to E_2$ und $S : F_1 \to F_2$ linear, so existiert genau eine lineare Abbildung $T \otimes S : E_1 \otimes F_1 \to E_2 \otimes F_2$ mit

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = (Tx) \otimes (Sy)$$

für alle $x \in E_1$ und $y \in F_1$.

Beweis. (a) Nach Definition ist $E \times F \to E \otimes F$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ bilinear. Ist $B : E \times F \to G$ bilinear, so ist die (wohldefinierte!) Abbildung

$$\tilde{B} : E \circ F \to G, \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (x_i \circ y_i) \mapsto \sum_{i=1}^{r} B(\alpha_i x_i, y_i)$$

linear mit $\tilde{B}|_N = 0$. Folglich ist

$$\dot{B} : E \otimes F \to G, \quad [\xi] \mapsto B(\xi)$$

eine (wohldefinierte!) lineare Abbildung mit $B(x, y) = \dot{B}(x \otimes y)$ für alle $(x, y) \in E \times F$. Die Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus $E \otimes F = \operatorname{span}\{x \otimes y;\ x \in E, y \in F\}$.

(b) Seien $T : E_1 \to E_2$ und $S : F_1 \to F_2$ linear. Dann ist die Abbildung

$$E_1 \times F_1 \to E_2 \otimes F_2, \quad (x, y) \mapsto (Tx) \otimes (Sy)$$

bilinear, und nach Teil (a) existiert eine eindeutige lineare Abbildung $R : E_1 \otimes F_1 \to E_2 \otimes F_2$ mit

$$R(x \otimes y) = (Tx) \otimes (Sy)$$

für alle $x \in E_1$ und $y \in F_1$. □

Bemerkung. Genauso zeigt man, dass zu jeder bi-antilinearen Abbildung $B : E \times F \to G$ genau eine antilineare Abbildung $\dot{B} : E \otimes F \to G$ existiert mit

$$B(x, y) = \dot{B}(x \otimes y)$$

für alle $(x, y) \in E \times F$.