UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2013/14

Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen - Zusammenfassung

Die folgenden Regeln ermöglichen das Rechnen mit Grenzwerten. Man beachte, dass einige dieser Regeln nur unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen gelten. Es gibt auch Situationen, in denen keine allgemeine Aussage möglich ist. Diese Fälle sind mit '**?**' gekennzeichnet und müssen stets einzeln betrachtet werden.

- Tabelle 1 (Summen und Differenzen)

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen	
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a + b$	$a - b$
$\pm\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
∞	∞	∞	**?**
∞	$-\infty$	**?**	∞
$-\infty$	∞	**?**	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**

- Tabelle 2 (skalare Vielfache)

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$\lambda \in \mathbb{R}$ fest	$(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$		$\lambda \cdot a$
$\pm\infty$	> 0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	< 0	$\mp\infty$

- Tabelle 3 (Produkte)

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b$
$\pm\infty$	$b \in \mathbb{R},\ b > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b \in \mathbb{R},\ b < 0$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	0	**?**
∞	∞	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	∞	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	∞

- Tabelle 4 (Quotienten)
Hier wird immer vorausgesetzt, dass $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ ist.

Voraussetzungen		mögliche Folgerungen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{a}{b}$
$a > 0$	0	$\begin{cases} \infty & \text{, falls } b_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ -\infty & \text{, falls } b_n < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \textbf{?} & \text{, sonst} \end{cases}$
$a < 0$	0	$\begin{cases} -\infty & \text{, falls } b_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{, falls } b_n < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \textbf{?} & \text{, sonst} \end{cases}$
0	0	**?**
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$b > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$b < 0$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	0	$\begin{cases} \pm\infty & \text{, falls } b_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \mp\infty & \text{, falls } b_n < 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \textbf{?} & \text{, sonst} \end{cases}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**?**

- Tabelle 5 (Wurzeln)
Hier wird immer vorausgesetzt, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Voraussetzungen	mögliche Folgerungen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen	$(\sqrt{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen
$a \geq 0$	$\sqrt{a}$
∞	∞

- Beispiele:
Die Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n+5)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sind alle bestimmt divergent gegen ∞, jedoch gilt:

  (i) Zu '**?**' in Tabelle 1: Die Folge $(2n-n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞, die Folge $(n-2n)_{n\in\mathbb{N}} = (-n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$, und die Folge $(n+5-n)_{n\in\mathbb{N}} = (5)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 5.

  (ii) Zu '**?**' in Tabelle 3 und Tabelle 4 unten: Die Folge $(\frac{n^2}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞, die Folge $(\frac{n}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen 0, und die Folge $(\frac{2n}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2.