UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl.-Math. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2013/14

Blatt 2 Abgabetermin: bis Freitag, den 01.11.2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Es sei $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$, so ist auch $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$.

(b) Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist auch $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 0 \\ 4x + y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

auf zwei verschiedene Arten. Verwenden Sie zunächst die naive Einsetzungsmethode und anschließend den Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 3 (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie, falls möglich, die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme. Benutzen Sie dabei die Matrixdarstellung des Gleichungssystems und den Gauß-Algorithmus.

(a)
$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 2 \\ -2x - 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= -4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 **(2+2+1=5 Punkte)**

Welche der folgenden linearen Gleichungssysteme sind über- und welche unterbestimmt? Bestimmen sie, falls möglich, die Lösungsmenge.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

(c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Aufgabe 5* **(3* Punkte)**

Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine, bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{array}\right)$$
