UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl.-Math. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 4 Abgabetermin: bis Freitag, den 15.11.2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (1+2+2+1+2+1=9 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Machen Sie gegebenenfalls eine Fallunterscheidung für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) a_1, a_2 (b) a_1, a_2, a_3 (c) a_2, a_3, a_4 (d) a_1, a_2, a_4, a_5 (e) a_1, a_4, a_5 (f) a_2, a_5.

Aufgabe 2 (2+5=7 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Welche der Additionen $A+B$, $A+C$, $A+D$, $B+C$, $B+D$, $C+D$ sind möglich? Bestimmen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

(b) Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren, und berechnen Sie gegebenenfalls das Ergebnis. Beachten Sie dabei, dass eine Matrix unter Umständen auch mit sich selbst multipliziert werden kann.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(2+4=6 Punkte)**

Zu den beiden 2×2-Matrizen $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gehören die linearen Abbildungen

$$f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beschreiben Sie in Worten, wie die Abbildungen f_P und f_S geometrisch wirken.

(b) Berechnen Sie die Matrizen $P \cdot P$, $S \cdot S$, $P \cdot S$ und $S \cdot P$ und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen linearen Abbildungen.

Aufgabe 4* **(2*+2*=4* Punkte)**

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängige Vektoren, so sind für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ auch die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k, x \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig.

(b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und sind $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren, so sind auch die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.