UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl.-Math. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2013/14

Blatt 5 Abgabetermin: bis Freitag, den 22.11.2013, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2+4=6 Punkte)

(a) Prüfen Sie, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

(b) Prüfen Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix. Lösen Sie anschließend die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = b$ und $A \cdot x = c$ mit den Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie A^{-1}.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(0,5+1,5+1+1+2*=4+2* Punkte)**

(a) Geben Sie eine 2×2-Matrix A an, deren zugehörige lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer Drehung um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn entspricht. (Mit anderen Worten: Ist $x \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, so soll $A \cdot x$ der um $60°$ gedrehte Vektor sein.)

(b) Vergewissern Sie sich, dass A invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen. Wie wirkt die zugehörige lineare Abbildung $f_{A^{-1}}$ auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$?

(c) Wie wirkt die Multiplikation mit $A^6 = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$ auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$? Bestimmen Sie A^6, ohne das Produkt auszurechnen.

(d) Geben Sie eine 2×2-Matrix B an, deren zugehörige lineare Abbildung $f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einem Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ den an der x_1-Achse gespiegelten Vektor zuordnet.

(e) Gesucht ist nun schließlich eine 2×2-Matrix C, deren zugehörige lineare Abbildung $f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einem Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor zuordnet, den man erhält, wenn man x zuerst um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn dreht und dann an der x_1-Achse spiegelt. Berechnen Sie C mit Hilfe von A und B.

Aufgabe 4 **(0,5+0,5+1+1=3 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2b-3 & b+1 \\ 2b & -b \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -d \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 **(1+2+3*=3+3* Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2.10 aus der Vorlesung, dass A invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie $A^3 - 3A^2 + 4E_3$.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (b) zur Berechnung von A^{-1}. (*Hinweis: Finden Sie eine Matrix B mit $A \cdot B = E_3$.*)
