**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Dr. Kevin Everard

**Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie**
Wintersemester 2013/14

**Blatt 9** Abgabetermin: bis Freitag, den 20.12.2013, 12 Uhr

---

## Aufgabe 1 (2+2* Punkte)

(a) Benutzen Sie Definition 5.4 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die Folge $(\frac{3}{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Rechenregel 5.6 (c) aus der Vorlesung: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lambda \cdot a$.

---

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = q^n$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Anleitung: Betrachten Sie die Fälle $q = 1$, $q = 0$, $q = -1$, $q > 1$, $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$ und $q < -1$ in der angegebenen Reihenfolge.

- Im Falle $q > 1$ schreiben Sie $q = 1+t$ mit einem $t > 0$ und benutzen, dass $(1+t)^n \geq 1+nt$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Bernoullische Ungleichung).
- Im Falle $0 < q < 1$ schreiben Sie $q = \frac{1}{p}$ mit einem $p > 1$ und benutzen den vorigen Fall.
- Im Falle $-1 < q < 0$ benutzen Sie $0 < |q| < 1$ und das Quetschlemma.
- Im Falle $q < -1$ ist $|q| > 1$. Benutzen Sie, dass $||q^n| - |a|| \leq |q^n - a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

---

## Aufgabe 3 (1+3=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

erfüllt ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie* $(1-q)\cdot(\sum_{k=0}^{n} q^k)$.)

**(bitte wenden)**

(b) Untersuchen Sie, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $\big(\sum_{k=0}^{n} q^k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzw. bestimmt divergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.*)

---

**Aufgabe 4** **(1+1+1,5+1,5+2*=5+2* Punkte)**

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren bzw. bestimmt divergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{3n^4-12n^2-2n+27}{-\frac{1}{4}n^5+6n}$,

(b) $a_n = \frac{6n^3+\frac{2}{n}}{n^3+n^2-5}$,

(c) $a_n = \frac{4n^7+n}{n^6+6n^2}$,

(d) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$,

(e) $a_n = \frac{n!}{n!+(n-1)!} - n$.

---

**Aufgabe 5** **(1+1+1=3 Punkte)**

Benutzen Sie das Quetschlemma, um die Konvergenz der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beweisen. Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{1}{n!}$,

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (*Hinweis: Multiplizieren Sie $a_n$ mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.*),

(c) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot 11+3}{n}$.

---