UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 10 Abgabetermin: bis Freitag, den 10.01.2014, 12 Uhr

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *heißt* (linear) rekursiv definiert, *falls* $a_0, \ldots, a_{k-1}$ *vorgegeben sind, und das* n*-te Folgenglied* a_n *für* $n \geq k$ *definiert ist durch* $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$ *mit festen reellen Zahlen* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1 (4×1=4 Punkte)

Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch $a_0 = 3$, $a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann existieren Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (dies müssen Sie nicht beweisen). Bestimmen Sie diese Zahlen, indem Sie wie folgt vorgehen:

(i) Berechnen Sie zunächst a_2, a_3, a_4, a_5.

(ii) Die Zahlen x_1 und x_2 sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung* $x^2 = 2x + 3$.

(iii) Die Zahlen α und β sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a_0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 &= a_1. \end{aligned}$$

(iv) Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (i) und (ii) eine geschlossene Formel für das n-te Folgenglied a_n an und überprüfen Sie diese anhand der in (i) berechneten Folgenglieder a_2, a_3, a_4, a_5.

Aufgabe 2 (1+1+2=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren, und berechnen Sie deren Werte:

$$\text{(a)} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 3^n + 2^{-n}}{2^{2n}}.$$

Aufgabe 3 (4×1,5=6 Punkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren sogar absolut, welche divergieren? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k^3 + 3} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3}{k^4 + 2k^3 + 1} \qquad \text{(d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie das Konvergenzkriterium von Leibniz.*)

Aufgabe 5 **(3* Punkte)**

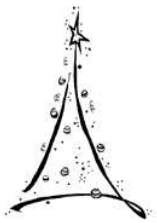
Sei

$$T_0 = \{z \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Re} z| \leq 1 \text{ und } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter

$$T_n = \{z \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Re} z| \leq 8 + n - \operatorname{Im} z \text{ und } 2n \leq \operatorname{Im} z \leq 8 + n\}.$$

Skizzieren Sie - möglichst vor dem 24.12.2013 - die Menge

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots \ .$$

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2014!