UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 11 Abgabetermin: bis Freitag, den 17.01.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (1,5+1+1,5=4 Punkte)

Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 78 Minuten.

(a) Die Anzahl der Bakterien zur Zeit t wird durch die Funktion

$$f(t) = C \cdot a^t$$

(näherungsweise) bestimmt. Die Zeit t soll dabei in Minuten angegeben werden. Bestimmen Sie a und C.

(b) Wieviele Bakterien sind nach 20 Minuten bzw. nach 3 Stunden vorhanden?

(c) Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?

Aufgabe 2 (3×1=3 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $\log(x+3) = 4 + \log(2x)$,

(ii) $7 \cdot 3^{5x} = 4^{x+1}$,

(iii) $2^{7^x} = 5^{2^x}$.

Aufgabe 3 (4×1,5=6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existieren (prüfen Sie zunächst die Approximierbarkeit!), und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^3+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{für} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 2 & \text{für} \quad x = -1 \\ -x + 2 & \text{für} \quad x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \\ x^2 & \text{für} \quad x \in (1, 2] \\ 2x + 3 & \text{für} \quad x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend, *falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ auch $f(x) \leq f(y)$ gilt.*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend, *falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ auch $f(x) < f(y)$ gilt.*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, *falls es ein $T > 0$ gibt mit $f(x) = f(x + T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, *falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.*

Aufgabe 5 (1,5*+1,5*=3* Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht gleichzeitig periodisch und streng monoton wachsend sein kann.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade, monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss. (*Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.*)