



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 12

Abgabetermin: bis Freitag, den 24.01.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1

(2+2=4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & , \text{ falls } x \in (-\infty, 1) \\ -2 & , \text{ falls } x = 1 \\ 2 \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & , \text{ falls } x \in (1, \infty) \end{cases},$$
$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

(2+3=5 Punkte)

- (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(b) \leq c \leq f(a)$ gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$. (Dies ist der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.)
- (b) Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\xi \in [0, 1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. (Ein solcher Punkt heißt *Fixpunkt* von f .)
(Hinweis: Wenden Sie Satz 6.16 auf die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ an.)

Aufgabe 3

(1+1,5+1,5=4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung. **Verwenden Sie dazu ausschließlich Definition 7.1 aus der Vorlesung!**

- (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$,
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$,
- (c) $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. (Hinweis: Erweitern Sie den Differenzenquotienten mit $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$.)

(bitte wenden)

Aufgabe 4**(4×1+2×1*=4+2* Punkte)**

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

- (a) $f_1(x) = \frac{2 \exp(x)}{x^3}$, (b) $f_2(x) = (\tan x)^2$,
(c) $f_3(x) = \frac{x^2-5}{\sqrt{x}}$, (d) $f_4(x) = \cos\left(\frac{x^3}{\exp(2x)}\right)$,
(e) $f_5(x) = x^x$, (f) $f_6(x) = \exp(\exp(\exp(x)))$.
-

Aufgabe 5**(2+2+2*=4+2* Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$.
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))}$.
-