UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2013/14

Blatt 13 Abgabetermin: bis Freitag, den 31.01.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Eine bestimmte reelle Größe wird unter den gleichen Bedingungen n-mal gemessen. Die hierbei gemessenen Werte $a_1, \ldots, a_n$ stimmen wegen der unvermeidlichen Messfehler nicht überein. Nach Gauß betrachtet man **den** Wert a als das zuverlässigste Ergebnis der Messung, für den die quadratische Abweichung

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$$

von den Messwerten minimal wird. Bestimmen Sie diesen Wert a.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Monotonieintervalle folgender Funktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cdot \exp(1 - x)$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(x^2 - 1)$.

Aufgabe 3 (2+3* Punkte)

(a) Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + e^x$$

eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Bestimmen Sie $(f^{-1})'(1)$.

(b) Die Funktion

$$\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

ist die Umkehrfunktion von $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$. Berechnen Sie die Ableitung von arcsin an den Stellen $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x^3 - 3x + 2|$. Finden Sie alle lokalen und globalen Extremstellen von f.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Es sei $b > 0$ eine beliebige positive Zahl. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^b x^2 \, dx.$$

Benutzen Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die äquidistante Zerlegung $Z_n = (t_0, \dots, t_n)$ mit $t_k = \frac{kb}{n}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$.

(*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass* $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*)

Aufgabe 6 **(3* Punkte)**

Bei zwei aufeinanderfolgenden chemischen Reaktionen wird die Konzentration c_B eines beim ersten Prozess entstehenden Stoffes B in Abhängigkeit der Zeit gemessen ($t = 0$ bei Reaktionsbeginn). Man erhält einen Zusammenhang der Form

$$c_B(t) = e^{-k_2 t}\left(\frac{k_1 c_0}{k_2 - k_1}\right)(e^{(k_2 - k_1)t} - 1),$$

wobei $k_1 = 0{,}2\,\mathrm{min}^{-1}$, $k_2 = 0{,}1\,\mathrm{min}^{-1}$ und $c_0 = 2$ ist. Zu welchem Zeitpunkt nach Beginn der Reaktion ist die größte Konzentration von B vorhanden? Wie groß ist diese Konzentration?
