



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 14

Abgabetermin: -

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3\sqrt{x} - 2x^5) dx &= 3 \int_0^1 \sqrt{x} dx - 2 \int_0^1 x^5 dx = 3 \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 \\ &= 3 \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - 2 \left(\frac{1}{6} - 0 \right) = 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen

$$\int_0^1 10e^{-5x} dx = -2 \int_0^1 (-5)e^{-5x} dx = -2 \left[e^{-5x} \right]_0^1 = -2(e^{-5} - 1) = 2 - \frac{2}{e^5}.$$

(c) Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ gilt $\frac{4t-8}{t^2-4} = \frac{4(t-2)}{(t-2)(t+2)} = \frac{4}{t+2}$. Also folgt

$$\int \frac{4t-8}{t^2-4} dt = 4 \int \frac{1}{t+2} dt = 4 \log(|t+2|).$$

(d) Für alle $x > 0$ ist $\sqrt{\frac{1}{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$. Dies liefert

$$\int_4^{25} \sqrt{\frac{1}{x^3}} dx = \int_4^{25} x^{-\frac{3}{2}} dx = \left[-2x^{-\frac{1}{2}} \right]_4^{25} = -\frac{2}{5} + 1 = \frac{3}{5}.$$

Aufgabe 2

- (a) Wir integrieren partiell. Sei $f(t) = t$ und $g'(t) = \sqrt{3t-1}$. Dann erhalten wir $f'(t) = 1$ und $g(t) = \frac{2}{9}(3t-1)^{\frac{3}{2}}$. Dies liefert

$$\begin{aligned}\int t\sqrt{3t-1} dt &= \frac{2}{9}t(3t-1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{9}(3t-1)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{2}{9}t(3t-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(3t-1)^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{2}{135}(3t-1)^{\frac{3}{2}}(9t-2).\end{aligned}$$

- (b) Wir berechnen das Integral mittels Substitution. Ist $u(x) = \sin(x)$, so ist $u'(x) = \cos(x)$. Ferner ist $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}$ Stammfunktion von $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}^5} dx &= \int f(u(x))u'(x) dx \\ &= -\frac{2}{3}(u(x))^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}(\sin(x))^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

- (c) Wir verwenden erneut die Substitutionsregel. Ist $u(x) = \log(x)$, so ist $u'(x) = \frac{1}{x}$. Mit $f(x) = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log(x)}{x} dx &= \int_1^e f(u(x))u'(x) dx \\ &= \int_{\log(e)}^{\log(1)} f(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- (d) Wir integrieren partiell. Sei $f(\theta) = e^\theta$ und $g'(\theta) = \sin(\theta)$. Dann erhalten wir $f'(\theta) = e^\theta$ und $g(\theta) = -\cos(\theta)$. Dies liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \sin(\theta) d\theta = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \cos(\theta) d\theta.$$

Eine erneute partielle Integration mit $f(\theta) = e^\theta$ und $g'(\theta) = \cos(\theta)$ liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \cos(\theta) d\theta = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \sin(\theta) d\theta.$$

Damit ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \sin(\theta) d\theta = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

Aufgabe 3

Sei also f ungerade und stetig und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

Wir substituieren nun im ersten Summanden $u(x) = -x$. Dann folgt

$$\int_{-\alpha}^0 f(x) dx = \int_{u(\alpha)}^{u(0)} f(x) dx = \int_{\alpha}^0 f(u(x))u'(x) dx = \int_{\alpha}^0 f(-x) \cdot (-1) dx.$$

Nach Voraussetzung ist f ungerade, also gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx &= \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^0 f(-x) \cdot (-1) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \\ &= - \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Für alle $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 1$ gilt

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \int_1^R x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = -\frac{1}{R} + 1.$$

Wegen $\frac{1}{R} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{R} + 1\right) = 1.$$

(b) Für alle $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 1$ gilt

$$\int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^R x^{-\frac{1}{2}} dx = [2\sqrt{x}]_1^R = 2\sqrt{R} - 2.$$

Wegen $\sqrt{R} \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow \infty$ existiert der Limes $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx$ nicht. Also existiert auch das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ nicht.

(c) Für alle $R \in \mathbb{R}$ mit $0 < R < 1$ gilt

$$\int_R^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_R^1 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_R^1 = -1 + \frac{1}{R}.$$

Wegen $\frac{1}{R} \rightarrow \infty$ für $R \downarrow 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{R \downarrow 0} \int_R^1 \frac{1}{x^2} dx$ nicht. Also existiert auch das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ nicht.

(d) Für alle $R \in \mathbb{R}$ mit $0 < R < 1$ gilt

$$\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_R^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = [2\sqrt{x}]_R^1 = 2 - 2\sqrt{R}.$$

Wegen $\sqrt{R} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow 0$ folgt $\lim_{R \rightarrow 0} \int_R^1 \frac{1}{x^2} dx = 2$. Also ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.
