



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2013/14

Blatt 15

Abgabetermin: -

Aufgabe 1

- (a) Sei $y'(t) = -\frac{1}{t} \frac{1+y(t)^2}{y(t)}$ und $y(1) = 2$, d.h. $f(t) = -\frac{1}{t}$ und $g(t) = \frac{1+t^2}{t}$. Wir verwenden die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung und erhalten

$$A(t) = \int_1^t \frac{-1}{s} ds = [-\log(s)]_1^t = -\log(t)$$

sowie

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_2^z \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_2^z = \frac{1}{2} \log(1+z^2) - \frac{1}{2} \log(5). \end{aligned}$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = \sqrt{5e^{2t} - 1}$$

wegen $B^{-1}(A(1)) = 2$. Also erhält man als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = \sqrt{\frac{5}{t^2} - 1}$$

für $t \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

- (b) Sei $y'(t) = -\frac{1}{t} \frac{1+y(t)^2}{y(t)}$ und $y(-1) = -2$, d.h. $f(t) = -\frac{1}{t}$ und $g(t) = \frac{1+t^2}{t}$. Wir verwenden die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung und erhalten

$$A(t) = \int_{-1}^t \frac{-1}{s} ds = [-\log|s|]_{-1}^t = -\log|t|$$

sowie

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_{-2}^z \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{-2}^z = \frac{1}{2} \log(1+z^2) - \frac{1}{2} \log(5). \end{aligned}$$

Invertieren liefert $B^{-1}(t) = -\sqrt{5e^{2t} - 1}$ wegen $B^{-1}(A(-1)) = -2$. Also erhält man als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\sqrt{\frac{5}{t^2} - 1}$$

für $t \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

- (c) Sei $y'(t) = e^{y(t)} \sin(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)$ und $y(\pi) = -\log(2)$, d.h. $f(t) = \sin(x)$ und $g(t) = e^t$. Ist $x = 0$ oder $x = \pi$, so ist $y'(t) = 0$, also y konstant $y(t) = -\log(2)$ für $t \in \mathbb{R}$. Andernfalls verwenden wir die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung und erhalten

$$A(t) = \int_{\pi}^t \sin(x) ds = [\sin(x)s]_{\pi}^t = \sin(x)(t - \pi)$$

und

$$B(z) = \int_{-\log(2)}^z e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-\log(2)}^z = -e^{-z} + 2.$$

Invertieren liefert $B^{-1}(t) = -\log(-t + 2)$. Falls $x \in (0, \pi)$, erhalten wir

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\log(2 - \sin(x)(t - \pi))$$

für $t \in \left(-\infty, \frac{2}{\sin(x)} + \pi\right)$ als Lösung. Ist $x \in (\pi, 2\pi)$, erhalten wir

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\log(2 - \sin(x)(t - \pi))$$

für $t \in \left(\frac{2}{\sin(x)} + \pi, \infty\right)$ als Lösung.

Aufgabe 2

- (a) Die Differentialgleichung ist linear und homogen mit getrennten Variablen mit $f(t) = 2t - 5$ und $g(t) = t$. Das Verfahren für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen liefert

$$A(t) = \int_{t_0}^t (2s - 5) ds = [s^2 - 5s]_{t_0}^t = t^2 - 5t - t_0^2 + 5t_0$$

und

$$B(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{y_0}^z = \log \left| \frac{z}{y_0} \right|.$$

Invertieren liefert $B^{-1}(t) = y_0 e^t$, und wir erhalten als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = y_0 e^{t^2 - 5t - t_0^2 + 5t_0}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Ist speziell $t_0 = 3$ und $y_0 = 1$, so erhält man

$$y(t) = e^{t^2 - 5t + 6}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Die Differentialgleichung ist linear und homogen mit getrennten Variablen mit $f(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$ und $g(t) = t$. Das Verfahren für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen liefert

$$A(t) = \int_{t_0}^t \frac{s}{s^2 + 4} ds = \left[\frac{1}{2} \log(s^2 + 4) \right]_{t_0}^t = \log \left(\sqrt{\frac{t^2 + 4}{t_0^2 + 4}} \right)$$

und

$$B(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{y_0}^z = \log \left| \frac{z}{y_0} \right|.$$

Invertieren liefert $B^{-1}(t) = y_0 e^t$, und wir erhalten als Lösung

$$y(t) = y_0 \sqrt{\frac{t^2 + 4}{t_0^2 + 4}}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

- (c) Die Differentialgleichung ist linear und inhomogen. Die Gleichung $(*)$ entspricht dem homogenen Anteil von $(\star)$, also sind $y(t) = y_h(t) = y_0 \sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}$ die Lösungen des homogenen Anteils. Laut Vorlesung erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch den Ansatz $y_s(t) = c(t)y_h(t)$. Es ist

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{t_0}^t \frac{s}{y_h(s)} ds = \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0} \int_{t_0}^t \frac{s}{(s^2+4)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0} \left[(s^2+4)^{\frac{1}{2}} \right]_{t_0}^t = \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0} \left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4} \right), \end{aligned}$$

also ist $y_s(t) = \sqrt{t^2+4} \left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4} \right)$ eine spezielle Lösung von $(\star)$. Alle Lösungen von $(\star)$ erhält man nun aus

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = \sqrt{t^2+4} \left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4} \right) + y_0 \sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}.$$

Ist speziell $t_0 = \sqrt{5}$ und $y_0 = 18$, so erhält man

$$y(t) = 3\sqrt{t^2+4} + (t^2+4)$$

für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Wir betrachten zunächst die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = -2y(t).$$

Laut Vorlesung besitzt sie die allgemeine Lösung $y_{h,c}(t) = ce^{-2t}$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$y'(t) = -2y(t) + e^{-2t}$$

zu bestimmen, berechnen wir $\frac{b(t)}{y_h(t)} = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}} = 1$ und erhalten dazu zum Beispiel die Stammfunktion $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$. Folglich ist

$$y_s(t) = te^{-2t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Alle Lösungen der inhomogenen DGL sind nun gegeben durch

$$y_c(t) = y_s(t) + y_{h,c}(t) = te^{-2t} + ce^{-2t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $y(\log(2)) = \log(2)$ ergibt die Bedingung

$$\log(2)e^{-2\log(2)} + ce^{-2\log(2)} = \log(2).$$

Wegen $e^{-2\log(2)} = e^{\log(2^{-2})} = \frac{1}{4}$ ist diese äquivalent zu $\frac{\log(2)+c}{4} = \log(2)$, und wir erhalten $c = 3\log(2) = \log(8)$. Die gesuchte Lösung des AWP lautet damit

$$y(t) = e^{-2t}(t + \log(8)), \quad t \in \mathbb{R}.$$