UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl.-Math. Kevin Everard

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2013/14

Auswahl vorausgesetzter Vorkenntnisse

Mengenlehre

Das Wort *Menge* ist ein alltäglicher Begriff. Jeder hat also eine prinzipielle Vorstellung davon. Der Mathematiker definiert sie wie folgt:

Eine Menge ist eine Gesamtheit von Dingen oder Objekten,
die Elemente dieser Menge genannt werden.

Eine Menge wird dadurch gegeben, dass man ihre Elemente aufzählt, etwa

$$\text{Tollersport} = \{\text{Kegeln}, \text{Bowling}, \text{Snooker}, \text{Billard}\},$$

oder sie durch eine Eigenschaft eindeutig beschreibt, etwa

$$\text{Schlimmetage} = \{\text{Wochentage};\ \text{an diesem Wochentag findet die MfSdBudLC statt}\}.$$

Offenbar hätte man die zweite Menge auch als Schlimmetage $= \{\text{Freitag}\}$ definieren können.

Die Menge ohne Element bezeichnet man als *leere Menge*. Ihr Symbol ist $\emptyset$ (alternativ $\{\}$, was jedoch an der Universität eher ungebräuchlich ist).

Bei der Angabe durch Aufzählung sollte beachtet werden, dass dies zunächst nur für Mengen mit endlich vielen Elementen sinnvoll möglich ist. Trotzdem kann man in bestimmten Fällen auch unendliche Mengen auf diese Art beschreiben. So ist zum Beispiel klar, welche Elemente die Menge $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ enthält (nämlich die positiven geraden Zahlen).

Mengen werden meist mit Großbuchstaben bezeichnet, Elemente mit Kleinbuchstaben.

Die folgenden Symbole und ihre Bedeutung sollten Sie kennen:

(a) $A = B$: Die Mengen sind gleich, enthalten also dieselben Elemente.

(b) $a \in A$: a ist ein Element der Menge A (ist dem nicht so, schreibt man $a \notin A$).

(c) $A \subset B$: Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B, d.h. alle Elemente aus A sind auch Elemente von B.

(d) $A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\}$: Durchschnitt zweier Mengen A und B.

(e) $A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}$: Vereinigung zweier Mengen A und B.

(f) $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ und } x \notin B\}$ das Komplement von B in A.

Es gelten die folgenden Regeln für den Umgang mit diesen Symbolen (hierbei steht $A \subset B \subset C$ für $A \subset B$ und $B \subset C$):

(a) $A \cap B = B \cap A$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (Kommutativ- und Assoziativgesetz)

(b) $A \cup B = B \cup A$ und $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (Kommutativ- und Assoziativgesetz)

(c) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, genauso $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

(d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (Distributivgesetz)

Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Die Elemente der Potenzmenge sind also ihrerseits wieder Mengen. So ist die Potenzmenge von $A = \{1, 2, 3\}$ zum Beispiel gegeben durch

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Man beachte hierbei, dass A und $\emptyset$ stets Teilmengen einer Menge A sind.

Weiterhin ist zu erwähnen, dass $\{1, 2\}$ und $\{2, 1\}$ keine verschiedenen Mengen sind, und dass es Mengen wie $\{1, 2, 1\}$ nicht gibt. Die Reihenfolge der Elemente ist unwichtig, und jedes Element kommt nur einmal vor.

Zu zwei Mengen A und B kann man die sogenannte *Produktmenge* $A \times B$ definieren als

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Es handelt sich hierbei um die Menge aller *geordneten Paare* (hier darf man die Reihenfolge der Einträge also nicht vertauschen), deren erste *Komponente* ein Element aus A und deren zweite Komponente ein Element aus B ist. Für $A \times A$ schreibt man auch A^2. Ferner kann man auch die Produktmenge von drei oder mehr Mengen bilden. Entsprechend ist dann das Symbol A^n für $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ zu verstehen als n-faches Produkt von A mit sich selbst.

Zahlensysteme

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

(a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: die Menge der *natürlichen Zahlen*. Wir setzen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: die Menge der *ganzen Zahlen*.

(c) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$: die Menge der *rationalen Zahlen*.

(d) $\mathbb{R}$: die Menge der *reellen Zahlen*.

(e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: die Menge der *irrationalen Zahlen*.

Als wichtige Schreibweisen/Symbole lohnt es sich, zu kennen:

(a) $x^n = x \cdot \ldots \cdot x$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$), das n-fache Produkt der reellen Zahl x mit sich selbst, also die n-te *Potenz* von x. Hierbei ist $x^0 = 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(b) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\sum\limits_{j=0}^{k} x_j = \sum_{j=0}^{k} x_j = x_1 + \ldots + x_k$: die Summe der reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$.

(d) $\prod\limits_{j=0}^{k} x_j = \prod_{j=0}^{k} x_j = x_1 + \ldots + x_k$: das Produkt der reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$.

(e) $n! = \prod\limits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot \ldots \cdot n$: die *Fakultät* der natürlichen Zahl n, also das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

Die grundlegenden Rechenregeln für Potenzen sind:

(i) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ und $(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $y \neq 0$ im zweiten Fall.

(ii) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$.

(iii) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ und $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$.

(iv) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$.

Der Ausrduck $(x+y)^n$ lässt sich für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ nach der *binomischen Formel* schreiben als

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

wobei der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (n über k) für $0 \leq k \leq n$ definiert ist durch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Als Spezialfälle der obigen Formel kennt man

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{und} \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

als *erste* bzw. *zweite binomische Formel* aus der Schule.

Als Exponenten von Potenzen sind auch rationale Zahlen möglich, allerdings muss hierfür im Allgemeinen die Basis eine positive reelle Zahl sein. Dabei gelten die selben Rechenregeln (i)-(iv) wie bei ganzzahligen Exponenten. Man beachte insbesondere, dass $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ und $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.

Von besonderer Bedeutung sind auch die folgenden Mengen reeller Zahlen, die sogenannten *Intervalle*. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ und $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$ und $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$.
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$ und $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\}$.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$ und $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$.

Es ist daher $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Man sagt *abgeschlossenes Intervall* für ein Intervall der Form $[a, b]$ und *offenes Intervall* für ein Intervall der Form (a, b). Intervalle der Form $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ nennt man *halboffen*. Die Verwendung umgekehrter eckiger Klammern für offene Intevallgrenzen (etwa $]a, b[$ für (a, b)) ist an der Universität eher nicht gebräuchlich.

Funktionen und Abbildungen

Abbildungen (Funktionen) sind ein zentrales Thema der Mathematik. Sind A und B nicht leere Mengen, so ist eine Abbildung $f : A \to B$ eine Zuordnung, die jedem Element aus A genau ein

Element aus B zuordnet. Man schreibt für die Zuordnung von $y \in B$ zu $x \in A$ auch $x \mapsto y$ oder $f(x) = y$.

Man beachte bei der Definition die Stelle des Wortes 'genau': Jedem $x \in A$ wird genau ein $y \in B$ zugeordnet, d.h., dass nicht etwa $x \mapsto y_1$ und $x \mapsto y_2$ für $y_1 \neq y_2$ möglich ist. Ein $x \in A$ kann nicht zwei (oder mehrere) Funktionswerte haben. Dagegen kann ein $y \in B$ durchaus als Funktionswert mehrerer x-Werte vorkommen, etwa $y = f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$.

Man kann eine Abbildung entweder dadurch definieren, dass man die Zuordnung jedes einzelnen x-Wertes aus A nach B angibt, also eine *Zuordnungstabelle* (*Wertetabelle*) erstellt, oder dadurch, dass man eine sogenannte *Abbildungsvorschrift*, also eine allgemeine Zuordnungsanweisung, angibt. Zum Beispiel ordnet die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x$$

jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}(= A)$ den doppelten Wert $2x \in \mathbb{R}(= B)$ zu. Eine Zuordnungstabelle wäre hier nicht möglich.

Wichtig: zur Angabe einer Abbildung gehören neben der Abbildungsvorschrift auch die Mengen A und B!

Folgende Begriffe sollten Sie kennen. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

(a) A heißt *Definitionsbereich* von f.

(b) Die Menge $f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$ heißt *Werte-* oder *Bildbereich* von f. Es gilt stets $f(A) \subset B$.

(c) f heißt *injektiv*, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ folgt. Zwei verschiedene Elemente des Definitionsbereiches einer injektiven Funktion werden also zwangsläufig auf zwei verschiedene Elemente des Bildbereiches abgebildet.

(d) f heißt *surjektiv*, falls $f(A) = B$ gilt. Jedes Element von B ist also Funktionswert von mindestens einem Element in A.

(e) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Der Absolutbetrag und Betragsungleichungen

Bekanntlich kann man zwei beliebige reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ *vergleichen*. Es gilt

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \geq 0 \quad \text{und} \quad a < b \Longleftrightarrow a \leq b \text{ und } a \neq b.$$

Wir schreiben ferner $a \geq b$ für $b \leq a$ und $a > b$ für $b < a$. Über die Zusammenhänge zwischen Rechenoperationen und Vergleich sollten Sie insbesondere wissen:

(a) Gilt $a \geq 0$ und $b \geq 0$, so ist auch $a + b \geq 0$ und $a \cdot b \geq 0$.

(b) Gilt $a \geq 0$ und $b \leq 0$, so ist $a \cdot b \leq 0$.

Entsprechendes gilt, wenn man '$\geq$' durch '$>$' und '$\leq$' durch '$<$' ersetzt.

Der *Absolutbetrag* oder *Betrag* $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0. \end{cases}$$

Er gibt den Abstand auf der Zahlengeraden von der Zahl x zum Nullpunkt an.

Für den Betrag gilt die sogenannte *Dreiecksungleichung*: Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x+y| \leq |x| + |y|$. Desweiteren ist $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Möchte man Betragsungleichungen auflösen, so ist zu beachten, dass

$$|x| \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq a \text{ und } x \geq -a$$

sowie

$$|x| \geq a \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq a \text{ oder } x \leq -a$$

gilt (ersteres ist natürlich nur für $a \geq 0$ möglich).

Lineare, quadratische und kubische Gleichungen

Die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = 0$ mit $a \neq 0$ lautet $x = -\frac{b}{a}$.

Für die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ gilt mit Hilfe der sogenannten *quadratischen Ergänzung*:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + px + (\tfrac{p}{2})^2 = -q + (\tfrac{p}{2})^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x + \tfrac{p}{2})^2 = \tfrac{p^2}{4} - q \qquad \text{(binomische Formel)} \\
&\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad |x + \tfrac{p}{2}| = \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \qquad (\text{falls } \tfrac{p^2}{4} - q \geq 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad x + \tfrac{p}{2} = \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x + \tfrac{p}{2} = -\sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{p}{2} - \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten:

(a) In der Ausgangsgleichung steht vor dem x^2 keine Zahl. Ein in einer konkreten Aufgabe eventuell auftretender Vorfaktor muss zuerst durch Division verrechnet werden. So wird aus $ax^2 + bx + c = 0$ die Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, falls $a \neq 0$.

(b) Die Gleichung $x^2 = a$ mit $a \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $|x| = \sqrt{a}$ (und nicht $x = \sqrt{a}$). Nach Definition des Betrages ist letzteres äquivalent zu $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$.

(c) Die Quadratwurzel kann nur aus einer nichtnegativen reellen Zahl gezogen werden. Bei $(*)$ kann man also ausschließlich im Fall $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ weiterrechnen. Ansonsten ist die Rechnung dort beendet, und die Gleichung hat keine Lösung.

(d) Die quadratische Gleichung besitzt demnach

- zwei Lösungen, falls $\frac{p^2}{4} - q > 0$
- eine Lösung, falls $\frac{p^2}{4} - q = 0$
- keine Lösung, falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Für kubische Gleichungen der Form $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ gibt es ebenfalls eine Lösungstheorie. Diese ist jedoch etwas komplizierter als die der quadratischen Gleichungen und soll hier nicht präsentiert werden. Hat man aber schon *eine* Lösung der kubischen Gleichung, so kann man die weiteren Lösungen (falls vorhanden) folgendermaßen finden:

(a) Ist etwa x_0 eine Lösung der kubischen Gleichung (gilt also $x_0^3 + px_o^2 + qx_0 + r = 0$), so führt man eine Polynomdivision durch. Die Rechnung

$$(x^3px^2 + qx + r) : (x - x_0)$$

liefert dann ein quadratisches Polynom, sagen wir $x^2 + ax + b$.

(b) Um die restlichen Lösungen der kubischen Gleichung zu finden, muss man nun nur noch die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ lösen.

Wie findet man aber diese erste Lösung x_0? Gerade dann, wenn die *Koeffizienten* der Gleichung, also die Zahlen p, q und r ganzzahlig sind, kann man zunächst versuchen, eine solche Lösung unter den Teilern der Zahl r zu finden. Man probiert es zunächst mit 1 und -1, dann mit dem nächstgrößeren Teiler von r und dem Negativen dieses Teilers, usw.

Man beachte, dass die erste Lösung x_0 auch wieder eine Lösung der quadratischen Gleichung sein kann, die aus der Polynomdivision hervorgeht.

Literatur

Die letzten beiden Bücher auf der Literaturliste auf der Homepage eignen sich besonders zur Vorbereitung auf Mathematik im Studium. Sie sind (wie die anderen aufgelisteten Werke) im sogenannten Semesterapparat in der Campusbibliothek für Mathematik und Informatik (Geb. E2 3) zu finden:

- K. Fritzsche: Mathe für Einsteiger
- W. Preuß, G. Wenisch: Lehr- und Übungsbuch Mathematik (Band 1)
