Ergänzung zur Analysis III

Für $A = (a_{ij}) \in M(n \times p, K)$ (K Körper), $1 \leq p \leq n$ und $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$A_{i_1 \ldots i_p} = (a_{i_{\mu,\nu}})_{1 \leq \mu,\nu \leq p} \in M(p \times p, K).$$

Satz 9.11 (b) Für $1 \leq p \leq n$ und $A, B \in M(n \times p, K)$ gilt

$$\det(A^t B) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \det(A_{i_1 \ldots i_p}) \ \det(B_{i_1 \ldots i_p})$$

Beweis Sei $A \in M(n \times p, K)$. Für $b_1, \ldots, b_p \in K^n$ bezeichne $(b_1, \ldots, b_p) \in M(x \times p, K)$ die Matrix mit den Spalten $b_1, \ldots, b_p$. Da beide Seiten multilinear von den Spaltenvektoren von B abhängen, genügt es, die Formel bei festem A zu beweisen für Matrizen B der Form

$$B = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) \quad (j_1, \ldots, j_p \in \{1, \ldots, n\}),$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren des K^n seien. In diesem Fall ist

$$A^t B = (A^t e_{j_1}, \ldots, A^t e_{j_p}) = (A_{j_1 \ldots j_p})^t$$

und daher $\det(A^t B) = \det(A_{j_1 \ldots j_p})$. Sind $j_1, \ldots, j_p$ nicht paarweise verschieden, so sind beide Seiten der zu beweisenden Gleichung 0.

Sind $j_1, \ldots, j_p$ paarweise verschieden und ist $\pi : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, p\}$ die Permutation mit

$$j_{\pi(1)} < j_{\pi(2)} < \ldots j_{\pi(p)},$$

so ist die rechte Seite der Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\det(A_{j_{\pi(1)} \ldots j_{\pi(p)}}) \det(B_{j_{\pi(1)} \ldots j_{\pi(p)}}) \\
&= \operatorname{sgn}(\pi)^2 \det(A_{j_1 \ldots j_p}) \det(B_{j_1 \ldots j_p}) \\
&= \det(A_{j_1 \ldots j_p}) = \det(A^t B),
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $B_{j_1 \ldots j_p} = E_p$ ist.