



Seminar zur Analysis

im Wintersemester 2014/15
Einführung in die Theorie der Fourierreihen

Maßtheoretische Grundlagen

1 σ -Algebren, messbare Funktionen und Maße

Seien X eine beliebige Menge und $P(X)$ die Potenzmenge von X .

Definition 1.1. Ein System $\mathcal{A} \subset P(X)$ heißt σ -Algebra, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- (iii) (A_n) Folge von Mengen in $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 1.2. Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ -Algebren auf X . Dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ -Algebra auf X .

Definition 1.3. (i) Sei

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) = \bigcap \left(\mathcal{A}; \mathcal{A} \subset P(\mathbb{R}^N) \text{ } \sigma\text{-Algebra mit } U \in \mathcal{A} \text{ für alle offenen } U \subset \mathbb{R}^N \right),$$

d.h. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ ist die kleinste σ -Algebra auf $\mathbb{R}^N$, die alle offenen Mengen enthält. Wir nennen $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ die *Borelsche σ -Algebra* auf $\mathbb{R}^N$.

- (ii) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (*Borel-*)messbar, falls $f^{-1}(U) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.4. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.

Satz 1.5. Seien $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (i) Die Funktionen $f + g, \alpha f, f \cdot g, |f|, \operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind messbar.
- (ii) Falls f reellwertig ist, sind $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$ messbar mit $f = f^+ - f^-$.
- (iii) Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ sind messbar.

Für jeden offenen Quader $Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N) \subset \mathbb{R}^N$ ($a_i < b_i$ für $i = 1, 2, \dots, N$) sei

$$\operatorname{Vol}(Q) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$$

das Volumen von Q .

Satz 1.6. Durch

$$\lambda: \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty],$$

$$A \mapsto \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(Q_n); (Q_n) \text{ Folge offener Quader mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$$

wird eine Abbildung definiert mit

- (i) $\lambda(\emptyset) = 0$,
- (ii) Für eine Folge (A_n) disjunkter Mengen in $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Bemerkung 1.7. Man nennt eine auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ definierte Funktion $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit (i) und (ii) ein *Maß* auf $\mathcal{A}$.

Definition 1.8. Das Maß λ aus Satz 1.6 heißt *N-dimensionales Lebesgue-Maß*.

2 Das Lebesgue Integral

Für $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ sei

$$\chi_A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von A . Eine Funktion der Form

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

mit $n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{C}$ und $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ für $i = 1, 2, \dots, n$ heißt *einfache Funktion*.

Definition 2.1. (i) Für eine einfache Funktion $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ wie oben mit $f \geq 0$ definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int f d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i).$$

(ii) Für eine messbare Funktion $f \geq 0$ definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx; g \text{ einfach mit } 0 \leq g \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Die Funktion f heißt *integrabel*, falls $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx < \infty$.

(iii) Eine messbare Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *integrabel*, falls $\operatorname{Re}(f)^\pm$ und $\operatorname{Im}(f)^\pm$ integrabel sind. Wir nennen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Re}(f)^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Re}(f)^- d\lambda \right) \\ &\quad + i \left(\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Im}(f)^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{Im}(f)^- d\lambda \right) \end{aligned}$$

das *Lebesgue Integral* von f .

Bemerkung 2.2. (i) Wir vereinbaren folgende Rechenregeln:

- (a) $x + \infty = \infty + x = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (b) $x \cdot \infty = \infty$ für alle $x > 0$,
- (c) $0 \cdot \infty = 0$.

(ii) Das Integral einer einfachen Funktion $f \geq 0$ in Definition 2.1 (i) ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Darstellung von f .

Man nennt $A \subset \mathbb{R}^N$ eine *Nullmenge*, falls $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ und $\lambda(A) = 0$.

Definition 2.3. Man sagt, eine punktweise definierte Eigenschaft gilt *fast überall* (kurz: *f.ü.*), falls es eine Nullmenge A gibt, sodass jeder Punkt $x \in A^c$ diese Eigenschaft hat.

Ein Beispiel hierfür wäre $f = 0$ f.ü.

Satz 2.4. Seien $f, g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ integabel und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(i) Die Funktionen $f + g$ und αf sind integabel und

$$\int (f + g) d\lambda = \int f d\lambda + \int g d\lambda, \quad \int (\alpha f) d\lambda = \alpha \int f d\lambda.$$

(ii) Falls $f \leq g$, dann gilt $\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$.

(iii) Eine messbare Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann integabel, wenn $|f|$ integabel ist. In diesem Fall gilt:

(a) $|\int f d\lambda| \leq \int |f| d\lambda.$

(b) $\int |f| d\lambda = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f.ü.

(iv) Falls $f = g$ f.ü., dann gilt $\int f d\lambda = \int g d\lambda$.

Definition 2.5. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$. Eine funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *messbar* bzw. *integabel*, falls die triviale Fortsetzung

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

diese Eigenschaft hat. Ist $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ integabel oder messbar und nichtnegativ, so setzt man

$$\int_A f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x) dx.$$

Die Eigenschaften des Integrals aus Satz 2.4 gelten sinngemäß.

3 Konvergenzsätze

Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ und seien $f_1, f_2, \dots$ und f messbare Funktionen auf A , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

für fast alle $x \in A$ gilt.

Satz 3.1 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Gilt*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$$

für fast alle $x \in A$, so ist

$$\int_A f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx.$$

Satz 3.2 (Satz von der majorisierten Konvergenz). *Gibt es eine integrierbare Funktion g auf A mit*

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in A$, so ist f integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx.$$

4 Der Satz von Fubini

Seien $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{N'})$. Dann ist $A \times B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{N+N'})$ und es gilt

$$\lambda(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B).$$

Bemerkung 4.1. Die σ -Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{N+N'})$ wird erzeugt von Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^N)$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{N'})$.

Satz 4.2 (Satz von Fubini). *Sei f integrierbar auf $A \times B$. Dann gilt:*

(i) *Für fast alle $x \in A$ ist der Schnitt*

$$f_x: B \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto f(x, y)$$

integrierbar. Für fast alle $y \in B$ ist der Schnitt

$$f^y: A \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x, y)$$

integrierbar.

(ii) *Die Funktion*

$$I_f: A \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} \int_B f_x(y) dy, & \text{falls } f_x \text{ integrierbar,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar.

Die Funktion

$$J_f: B \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto \begin{cases} \int_A f^y(x) dx, & \text{falls } f^y \text{ integrierbar,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar.

(iii) *Es gilt:*

$$\int_{A \times B} f(t) dt = \int_A I_f(x) dx = \int_B J_f(y) dy.$$

Bemerkung 4.3. Man schreibt (iii) oft in der Form

$$\int_{A \times B} f(t) dt \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$$

und sagt „die Reihenfolge der Integration darf vertauscht werden“.

5 Die Transformationsformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und sei $T: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ differenzierbar. Dann bezeichnet

$$J_T(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(x) & \cdots & \partial_N T_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 T_N(x) & \cdots & \partial_N T_N(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von T im Punkt $x \in U$.

Satz 5.1. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^N$ offen und sei $T: U \rightarrow V$ eine bijektive Abbildung, sodass T und T^{-1} stetig differenzierbar sind. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ die Gleichung*

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(T(x)) |\det(J_T(x))| dx.$$

6 Der Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue Integral

Satz 6.1. *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:*

- (i) *Die Funktion f ist genau dann Riemann integrierbar, wenn sie in fast jedem Punkt aus $[a, b]$ stetig ist.*
- (ii) *Ist f Riemann integrierbar, dann ist f auch Lebesgue integrierbar und das Riemann- und das Lebesgue Integral stimmen überein.*

Bemerkung 6.2. Nicht jede Lebesgue integrierbare Funktion ist Riemann integrierbar. Zum Beispiel ist die charakteristische Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue integrierbar mit

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = 0,$$

aber sie ist nicht Riemann integrierbar.

7 Die Räume $\mathcal{L}^p$ und L^p

Definition 7.1. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und } \|f\|_p < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\mathcal{L}^\infty = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und } \|f\|_\infty < \infty\}$$

mit

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{N \subset \mathbb{R} \\ \text{Nullmenge}}} \left\{ \sup \{|f(x)|; x \in \mathbb{R} \setminus N\} \right\}.$$

Bemerkung 7.2. (i) Falls $f \in \mathcal{L}^\infty$, so ist $\{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ eine Nullmenge.

(ii) Falls $f \in \mathcal{L}^p$ mit $\|f\|_p = 0$, so ist $f = 0$ fast überall.

Definition 7.3. (i) Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $\mathcal{N}^p = \{f \in \mathcal{L}^p; \|f\|_\infty = 0\}$.

(ii) Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}^p$. Also besteht der Raum L^p aus den Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}^p \quad \text{für } f, g \in \mathcal{L}^p.$$

Satz 7.4. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt:

(i) Die Mengen $\mathcal{L}^p$ und L^p sind $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

(ii) Durch $\|f + \mathcal{N}^p\|_p = \|f\|_p$ wird eine Norm auf L^p definiert, d.h. für alle $f, g \in L^p$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$(a) \quad \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0,$$

$$(b) \quad \|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p,$$

$$(c) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(iii) Der Raum L^p ist ein Banachraum.

(iv) Ist $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p$, so existiert eine Folge

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

mit $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Man sagt, die stetigen, 2π -periodischen Funktionen sind dicht in L^p für $1 \leq p < \infty$.

Bemerkung 7.5. (i) Die Ungleichung (c) in (ii) nennt man die *Dreiecks-Ungleichung*.

(ii) Für $1 < p < q < \infty$ gilt $L^1 \supset L^p \supset L^q \subset L^\infty$.