UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

Blatt 10 Abgabetermin: Mittwoch, 20.01.2016

Aufgabe 36 (2+2=4 Punkte)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n$ offen und $a \in \Omega$. Es sei

$$r_a := \operatorname{dist}(a, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) = \inf\{\|a-w\|;\ w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega\} .$$

Zeigen Sie:

(a) $r_a = \max\{r > 0;\ B_r(a) \subset \Omega\}$.

(b) Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so ist $B_{r_a}(a) \cap K^c \neq \varnothing$.

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Ω ist Existenzbereich einer holomorphen Funktion.

(ii) Es gibt eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so dass für jedes $a \in \Omega$ die Funktion $f|_{B_{r_a}(a)}$ auf keine offene Umgebung von $\overline{B_{r_a}(a)}$ fortgesetzt werden kann (r_a wie in Aufgabe 36).

(iii) Es gibt eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so dass für alle $w \in \partial\Omega$ und alle $r > 0$ keine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(B_r(w))$ existiert, die mit f auf einer Zusammenhangskomponente von $B_r(w) \cap \Omega$ übereinstimmt.

(*Hinweis: Zeigen Sie (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) und beachten Sie den Beweis von Satz 5.3 aus der Vorlesung.*)

Aufgabe 38 (2+2=4 Punkte)

Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n_2}$ holomorph-konvexe, offene Mengen. Zeigen Sie:

(a) $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ ist holomorph-konvex.

(b) Existiert eine eigentliche, holomorphe Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und ist Ω_2 holomorph-konvex, so ist auch Ω_1 holomorph-konvex.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2