UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

Blatt 11 Abgabetermin: Mittwoch, 27.01.2016

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $V \subset \mathbb{C}^m$ ein Holomorphiebereich und $f \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ so, dass

$$\Omega := \{z \in U \mid f(z) \in V\} \neq \emptyset.$$

Zeigen Sie: Ist $\overline{\Omega} \subset U$, so ist Ω ein Holomorphiebereich.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ offene Mengen, so dass für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen $f_k \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ existiert, die kompakt gleichmäßig auf Ω_1 gegen f konvergiert. Zeigen Sie: Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega_1$ gilt $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$.

Ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^n$ heißt polynom-konvex*, wenn K mit seiner polynom-konvexen Hülle*

$$\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |p(z)| \leq \|p\|_K \text{ für alle } p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\}$$

übereinstimmt.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass K polynom-konvex ist. (*Hinweis: Beweis von Korollar 5.7*)

Man nennt ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ lokal zusammenhängend, *falls für jeden Randpunkt $z \in \partial G$ und jede offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}^n$ von z eine kleinere offene Umgebung $U \subset V$ von z existiert, so dass $U \cap G$ zusammenhängend ist.*

Aufgabe 42* (1*+3*=4* Punkte)

(a) Finden Sie ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das nicht lokal zusammenhängend ist.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein lokal zusammenhängendes Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Zeigen Sie, dass G genau dann Existenzbereich von f ist, wenn f sich auf kein Gebiet $G_1 \supsetneq G$ holomorph fortsetzen lässt. (*Hinweis: Erster Teil des Beweises von Satz 5.3*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2