**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

## Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

**Blatt 3** Abgabetermin: Mittwoch, 18.11.2015

---

### Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $\partial_j f \equiv 0$ auf $G$ für $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist auf $G$.

---

### Aufgabe 10 (2+2+2*=4+2* Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie:

(a) Für $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt $\partial_j(\overline{\partial}_j(f\overline{g})) = (\partial_j f)\overline{(\partial_j g)}$.
(*Hinweis: Sie dürfen die Bemerkung zu Definition 1.17 benutzen.*)

(b) Ist $G$ ein Gebiet und ist $h : G \to \mathbb{C}^m$ eine holomorphe Funktion, für die $\|h\| : G \to \mathbb{R}$ konstant ist, so ist $h$ konstant auf $G$.
(*Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) mit $f = g$.*)

(c) Teil (b) bleibt nicht richtig, wenn man die euklidische Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^m$ ersetzt durch die Maximumsnorm $\|(z_\mu)_{\mu=1}^m\|_\infty = \max\limits_{\mu=1,\ldots,m} |z_\mu|$.

---

*Für eine beschränkte offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ definieren wir*

$$A(D) = \{f \in C(\overline{D});\ f|_D \text{ ist holomorph}\}.$$

### Aufgabe 11 (2+2+2*=4+2* Punkte)

Sei $P = P_r(a)$ ($a \in \mathbb{C}^n$, $r \in (0,\infty)^n$) ein Polyzylinder mit ausgezeichnetem Rand $\partial_0 P = \prod\limits_{i=1}^n \partial D_{r_i}(a_i)$.

(a) Sei $f \in A(P)$. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \overline{P}$ und jedes $j = 1, \ldots, n$ die Funktion

$$f_{z,j} : D_{r_j}(a_j) \to \mathbb{C},\ w \mapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, w, z_{j+1}, \ldots, z_n)$$

holomorph ist.
(*Hinweis: Betrachten Sie Funktionen $f_{z_k,j}$ mit geeigneten $z_k \in P$.*)

(b) Benutzen Sie das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen einer Veränderlichen, um zu schließen, dass für alle $f \in A(P)$ und $z \in \overline{P}$ gilt

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\infty,\partial_0 P}.$$

(c) Sei $S \subset \overline{P}$ eine abgeschlossene Menge mit $|f(z)| \leq \|f\|_{\infty,S}$ für alle $f \in A(P)$ und $z \in \overline{P}$. Zeigen Sie, dass $\partial_0 P \subset S$.

---

**Aufgabe 12** **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}^n$ genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $C$ eine Zusammenhangskomponente von $U$. Zeigen Sie, dass $\partial C \subset \partial U$ gilt.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2**