**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

# Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

**Blatt 4** Abgabetermin: Mittwoch, 25.11.2015

---

*Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt lokal beschränkt, falls für jeden Punkt $a \in U$ ein $r > 0$ existiert so, dass $f|_{P_r(a)}$ beschränkt ist.*

## Aufgabe 13 (1+3=4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $r, R \in (0, \infty)$.

(a) Sei $h\colon D_r(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion einer Variablen mit $h(D_r(0)) \subset D_R(0)$ und $h(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$|h(z)| \leq \frac{R}{r}|z| \qquad \text{für alle } z \in D_r(0).$$

(b) Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ lokal beschränkt und partiell komplex differenzierbar. Zeigen Sie, dass $f$ holomorph ist. (*Hinweis:* $f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^n f(a_1, \ldots, a_{j-1}, z_j, \ldots, z_n) - f(a_1, \ldots, a_j, z_{j+1}, \ldots, z_n)$)

---

*Der Grad eines Polynoms $p(z) = \sum a_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ ist definiert als*

$$\mathit{deg}(p) = \max\{|\alpha| \, ; \, a_\alpha \neq 0\} \quad (= -\infty \text{ für } p \equiv 0).$$

## Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und seien $R, c \in (0, \infty), k \in \mathbb{N}^n$ so, dass

$$|f(z)| \leq c|z^k|$$

für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $\|z\| \geq R$ gilt. Zeigen Sie, dass $f$ ein Polynom mit $\deg(f) \leq |k|$ ist.

---

## Aufgabe 15 (3 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{C}^n, V \subset \mathbb{C}^m$ offen und sei $f\colon U \to V$ biholomorph. Zeigen Sie, dass $n = m$ gelten muss.

---

## Aufgabe 16 (4 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $a \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^n)$ so, dass $J_f(a) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass offene Umgebungen $W \subset U$ von $a$, $V \subset \mathbb{C}^n$ von $f(a)$ existieren so, dass $f\colon W \to V$ biholomorph ist.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2**