UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

Blatt 7 Abgabetermin: Mittwoch, 16.12.2015

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$. Man nennt M zusammenhängend, wenn für je zwei offene Mengen $U, V \subset \mathbb{C}^n$ mit $M = (M \cap U) \cup (M \cap V)$ und $M \cap U \cap V = \emptyset$ bereits $M \cap U = \emptyset$ oder $M \cap V = \emptyset$ folgt. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt holomorph*, falls für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{C}^n$ von a und eine Funktion $F \in \mathcal{O}(V)$ existieren mit $f = F$ auf $V \cap M$.*

Aufgabe 25 (3+1=4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende, komplexe Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon M \to \mathbb{C}$ holomorph und gibt es einen Punkt $a \in M$ mit $|f(z)| \leq |f(a)|$ für alle $z \in M$, so ist f konstant.

(b) Ist M kompakt, so gibt es ein $a \in \mathbb{C}^n$ mit $M = \{a\}$.

Aufgabe 26 (2+2=4 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ beliebig. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann analytisch in D, wenn für alle $p \in D$ eine offene Umgebung $U \subset D$ von p und eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ mit $A \cap U = Z(h)$ existieren.

(b) Ist $n = 1$, so gilt:

$$A \text{ dünn in } D \;\Leftrightarrow\; A \text{ diskret in } D\,.$$

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ analytisch. Ein Punkt $a \in A$ heißt regulär (von der Dimension p) in A $(0 \leq p \leq n)$, *falls es eine offene Umgebung $U \subset D$ von a und eine holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^{n-p})$ mit $\mathrm{rg} J_h(a) = n - p$ und $A \cap U = Z(h)$ gibt. (Für $p = n$ heißt das: $a \in \mathrm{Int}(A)$.)*
Man nennt $a \in A$ singulär in A*, falls a nicht regulär in A ist.*

Aufgabe 27 (1+2+2=5 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $A \subset D$ analytisch.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Reg}(A) = \{a \in A;\ a \text{ regulär in } A\}$$

offen in A ist.

(b) Sei $a \in A$ regulär von der Dimension $p \in \{0, \dots, n\}$ in A. Zeigen Sie, dass es paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ und offene Umgebungen $V \subset D$ von a und $W \subset \mathbb{C}^p$ von 0 gibt, so dass die Abbildung

$$P_{i_1,\dots,i_p} : A \cap V \to W; \ (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_{i_1} - a_{i_1}, \dots, z_{i_p} - a_{i_p})$$

bijektiv ist.

(*Hinweis: Schauen Sie nochmals in den Beweis von Satz 3.2.*)

(c) Sei

$$A = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; \ z_1^2 = z_2 z_3\} \subset \mathbb{C}^3.$$

Zeigen Sie:

(i) A ist analytisch in $\mathbb{C}^3$.

(ii) Jeder Punkt $0 \neq a \in A$ ist regulär von der Dimension 2 in A.

(iii) 0 ist singulär in A.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und $f \in \mathcal{O}(U)$ z_n-regulär im Punkt $0 \in Z(f)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $r > 0$, so dass jede auf einer Nullumgebung $W \subset \mathbb{C}^{n-1}$ definierte Funktion $\phi : W \to \mathbb{C}$ mit $|\phi(z')| < r$ und $f(z', \phi(z')) = 0$ für alle $z' \in W$ stetig in $0' \in W$ ist.

(*Hinweis: Weierstraß'scher Vorbereitungssatz 4.5*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2