UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

Blatt 8 Abgabetermin: Mittwoch, 06.01.2016

Für $r, R \in [0,\infty)^n$ mit $r_i < R_i$ für $i = 1,\dots,n$ sei $K_{r,R}(0) = P_R(0) \setminus \overline{P}_r(0)$. Sie dürfen benutzen, dass Mengen dieser Form Gebiete in $\mathbb{C}^n$ sind.

Aufgabe 29 (4+1=5 Punkte)

Sei $n \geq 2$.

(a) Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(0))$ mit r, R wie oben. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(P_R(0))$ gibt mit $f = F|_{K_{r,R}(0)}$.

(*Hinweis: Betrachten Sie für festes $s \in (r_n, R_n)$ die Funktion*

$$P_{R'}(0) \times D_s(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z = (z', z_n) \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_s(0)} \frac{f(z',\xi)}{\xi - z_n} d\xi.)$$

(b) Lösen Sie mit Hilfe von Teil (a) noch einmal Aufgabe 21.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Sei $G = (D_1(0) \times K_{\frac{1}{2},1}(0)) \cup (D_{\frac{1}{2}}(0) \times D_1(0)) \subset \mathbb{C}^2$ und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $F \in \mathcal{O}(D_1(0) \times D_1(0))$ existiert mit $f = F|_G$. Argumentieren Sie dazu wie in der Lösung von Aufgabe 29.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}^{n-1}$ ein Gebiet und seien $0 < r < R$. Sei $f \in \mathcal{O}(G \times D_R(0))$ mit $Z(f, G \times \partial D_r(0)) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenanzahl $N(z)$ (in Vielfachheiten gezählt) der Funktion $f(z,\cdot)$ in $D_r(0)$ unabhängig von $z \in G$ ist. (*Hinweis: Argumentprinzip aus der Funktionentheorie I.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 32 **(4 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und seien $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f| \le |g|$ auf G. Zeigen Sie, dass eine Funktion $h \in \mathcal{O}(G)$ existiert mit $f = hg$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2016!