UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Daniel Kraemer

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2015/16

Blatt 9 Abgabetermin: Mittwoch, 13.01.2016

Aufgabe 33 (2+3+1=6 Punkte)

Seien $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $p \in G$ ein Punkt in G und $(f_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{O}(G)$ mit $|f_{k+1}| \leq |f_k|$ für alle $k \geq 1$ so, dass $\lim_{k\to\infty} f(p) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert. Zeigen Sie:

(a) Jede Teilfolge von $(f_k)_{k\geq 1}$ hat eine kompakt gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(b) Sind f und $\tilde{f}$ kompakt gleichmäßige Limiten zweier Teilfolgen von $(f_k)_{k\geq 1}$, so ist $f = \tilde{f}$.

(c) Die Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ konvergiert kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$

(*Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Montel, den Riemannschen Hebbarkeitssatz und das Prinzip der offenen Abbildung.*)

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und $G \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in A(G)$ (siehe Blatt 3). Zeigen Sie, dass $f(\overline{G}) = f(\partial G)$. Folgern Sie, dass jede Funktion $f \in A(G)$ mit $|f| \equiv 1$ auf ∂G konstant ist.

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Die Menge

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \|f\|_K \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$$

heißt die holomorph-konvexe Hülle *von K in Ω.*

Aufgabe 35 (2+2=4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Zeigen Sie:

(a) $\hat{K}_\Omega$ ist beschränkt und abgeschlossen in Ω.

(b) $\hat{K}_\Omega$ ist kompakt $\Leftrightarrow \overline{\hat{K}_\Omega}^{\mathbb{C}^n} \subset \Omega \Leftrightarrow \operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > 0$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ws1516/ft2