11 Hilberträume

Sei H ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 11.1. (a) Eine *sesquilineare Form* auf H ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$$

so, dass für alle $x, x', y, y' \in H$ und $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$\langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x', y \rangle, \quad \langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, y' \rangle.$$

(b) Eine sesquilineare Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H heißt

- (i) *hermitesch*, falls $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$ ist für alle $x, y \in H$,
- (ii) *positiv semidefinit*, falls $\langle x, x \rangle \geq 0$ ist für alle $x \in H$ und
- (iii) *positiv definit*, falls $\langle x, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ ist und $\langle x, x \rangle = 0$ ist genau dann, wenn $x = 0$ ist.

(c) Ein *inneres Produkt* (Skalarprodukt) auf H ist eine positiv definite hermitesche Form auf H .

Lemma 11.2. (*Polarisationsgleichungen*)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine sesquilineare Form auf H und seien $x, y \in H$.

(a) Ist $K = \mathbb{R}$ und ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch, so gilt $4\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle$.

(b) Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $4\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle + i(\langle x + iy, x + iy \rangle - \langle x - iy, x - iy \rangle)$.

Beweis. Beide Teile folgen durch Ausmultiplizieren direkt aus den Definitionen. □

Bemerkung 11.3. Eine sesquilineare Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum H ist hermitesch genau, wenn $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ ist für alle $x \in H$.

Beweis. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch, so folgt für alle $x \in H$

$$\overline{\langle x, x \rangle} = \langle x, x \rangle.$$

Ist $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$, so bedeutet das Vertauschen von x und y auf der rechten Seite der Formel in Lemma 11.2(b) genau den Übergang zur komplex konjugierten Zahl. □

Satz 11.4. (*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine positiv semidefinite hermitesche Form auf H . Dann ist

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

für alle $x, y \in H$. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist, so gilt für zwei Elemente $x, y \in H$ genau dann Gleichheit in der obigen Ungleichung, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für $x, y \in H$ und $\alpha \in K$ gilt

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Ist $\langle x, x \rangle = 0$, so folgt für $t \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = t \langle y, x \rangle$

$$0 \leq 2t |\langle x, y \rangle|^2 + \langle y, y \rangle.$$

Da dies für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist auch $\langle x, y \rangle = 0$. Ist $\langle x, x \rangle \neq 0$, so folgt mit $\alpha = -\langle y, x \rangle / \langle x, x \rangle$, dass

$$0 \leq -\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle.$$

Durch Multiplizieren mit $\langle x, x \rangle$ folgt die behauptete Ungleichung. Sind x, y linear abhängig, so gilt offensichtlich Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Sei jetzt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit und seien $x, y \in H$ zwei Elemente, für die Gleichheit gilt. Ist $x \neq 0$ und wählt man $\alpha = -\langle y, x \rangle / \langle x, x \rangle$, so folgt wie oben, dass $\langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = 0$ ist. Also ist

$$y = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x$$

in diesem Fall. Damit ist auch der Zusatz gezeigt. □

Korollar 11.5. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt auf H , so definiert

$$\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf H .

Beweis. Für $x, y \in H$ folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

gilt. Also gilt die Dreiecksungleichung. Offensichtlich erfüllt $\| \cdot \|$ auch die übrigen Eigenschaften einer Norm. □

Definition 11.6. Ein *Hilbertraum* ist ein K -Vektorraum H zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H , für das die induzierte Norm vollständig ist.

Beispiel 11.7. Beispiele von Hilberträumen sind

- (a) der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ und der $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt $\langle (x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$,

(b) der Raum ℓ^2 der quadratsummierbaren komplexen Zahlenfolgen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

(c) der Raum $L^2(\mu)$ aller (Äquivalenzklassen von) quadratintegriblen $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X f \overline{g} \, d\mu.$$

Satz 11.8. Für einen Hilbertraum H gilt:

(a) Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$ ist stetig, wenn man H mit seiner Normtopologie und $H \times H$ mit der Produkttopologie versieht.

(b) Für $x, y \in H$ gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{Parallelogrammgleichung}).$$

Beweis. (a) Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für $x, x_0, y, y_0 \in H$

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &\leq |\langle x - x_0, y \rangle| + |\langle x_0, y - y_0 \rangle| \\ &\leq \|x - x_0\|(\|y_0\| + \|y - y_0\|) + \|x_0\| \|y - y_0\|. \end{aligned}$$

Also ist das Skalarprodukt stetig.

(b) Durch Ausmultiplizieren folgt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in H$. □

Satz 11.9. (Bestapproximationen) Sei H ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jeder abgeschlossenen konvexen Menge $\emptyset \neq C \subset H$ und jeden Punkt $x \in H$ ein eindeutig bestimmtes Element $y \in C$ mit

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|; z \in C\}.$$

Beweis. Da $\text{dist}(x, C) = \text{dist}(0, C - x)$ ist, dürfen wir annehmen, dass $x = 0$ ist. Sei $\delta = \inf\{\|z\|; z \in C\}$ und sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in C mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \delta$. Ist $\epsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_\epsilon$

$$4\delta^2 + \epsilon^2 > 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 = 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4\delta^2 + \|y_n - y_m\|^2$$

gilt. Dabei haben wir die Parallelogrammgleichung und die Konvexität von C benutzt. Diese Überlegung zeigt, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von H existiert der Limes $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ in H . Da C abgeschlossen ist, ist $Y \in C$ und nach Wahl der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \text{dist}(0, C)$.

Ist auch $\tilde{y} \in C$ mit $\|\tilde{y}\| = \text{dist}(0, C)$, so folgt wie oben mit $\tilde{y}$ statt y_m , dass

$$4\delta^2 + \epsilon^2 > 2\|y_n\|^2 + 2\|\tilde{y}\|^2 \geq 4\delta^2 + \|y_n - \tilde{y}\|^2$$

für alle genügend großen n gilt. Also ist $\tilde{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. □

Definition 11.10. Sei H ein Hilbertraum und seien $x, y \in H, A \subset H$. Man nennt x, y *orthogonal* (geschrieben $x \perp y$), wenn $\langle x, y \rangle = 0$ ist. Die Menge

$$A^\perp = \{z \in H; z \perp a \text{ für alle } a \in A\}$$

heißt das *orthogonale Komplement* von A in H .

Mit der Stetigkeit des Skalarproduktes (Satz 11.8) folgt, dass orthogonale Komplemente beliebiger Teilmengen von H abgeschlossene Teilräume von H sind.

Satz 11.11. Sei H ein Hilbertraum und sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann zerfällt H in die algebraische direkte Summe

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Beweis. Ist $Y \in M \cap M^\perp$, so ist $\langle y, y \rangle = 0$ und damit $y = 0$.

Ist $x \in H$, so gibt es nach Satz 11.9 ein $m \in M$ mit $\|x - m\| = \text{dist}(x, M)$. Sei $m^\perp = x - m$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $z \in M$

$$\|m^\perp\|^2 = \|x - m\|^2 \leq \|x - (m + tz)\|^2 = \|m^\perp\|^2 - 2\text{Re } t\langle m^\perp, z \rangle + t^2\|z\|^2.$$

Für $t > 0$ und $z \in M$ folgt

$$\frac{2}{t}\text{Re}\langle m^\perp, z \rangle \leq \|z\|^2.$$

Indem man z durchmultipliziert mit geeigneten Zahlen vom Betrag 1, erhält man, dass

$$\frac{2}{t}|\langle m^\perp, z \rangle| \leq \|z\|^2$$

für alle $t > 0$ und $z \in M$ gilt. Also ist $m^\perp \in M^\perp$ und $x = m + m^\perp \in M + M^\perp$. □

Sei im Folgenden H ein Hilbertraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Korollar 11.12. (Satz von Riesz-Freché) Die Abbildung

$$\Phi : H \rightarrow H', \quad x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

ist ein antilinearer (das heißt $\Phi(x+x') = \Phi(x) + \Phi(x')$ und $\Phi(\alpha x) = \bar{\alpha}\Phi(x)$ für alle $x, x' \in H$ und $\alpha \in K$) isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Für $x \in H$ ist $\Phi(x)$ eine Linearform auf H . Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt, dass für $x \in H \setminus \{0\}$ gilt

$$\|\langle \cdot, x \rangle\| \leq \|x\| = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle \leq \|\langle \cdot, x \rangle\|.$$

Die Abbildung $\Phi : H \rightarrow H'$ ist offensichtlich antilinear. Sei $u \in H' \setminus \{0\}$. Nach Satz 11.11 gibt es einen Vektor $x \in (\text{Ker } u)^\perp \setminus \{0\}$. Wegen

$$\text{Ker } u \subset \text{Ker } \langle \cdot, x \rangle$$

gibt es nach Lemma 7.13 einen Skalar $\alpha \in K \setminus \{0\}$ mit $\langle \cdot, x \rangle = \alpha u$. Dann ist aber $u = \Phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Damit ist gezeigt, dass Φ antilinear, isometrisch und surjektiv ist. $\square$

Korollar 11.13. *Ist $M \subset H$ ein linearer Teilraum, so gilt*

$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$

Beweis. Wegen $M^\perp = \overline{M}^\perp$ dürfen wir annehmen, dass $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum ist. Offensichtlich gilt $M \subset (M^\perp)^\perp$. Sei umgekehrt $x \in (M^\perp)^\perp$. Nach Satz 11.11 gibt es Vektoren $m \in M$, $m^\perp \in M^\perp$ mit $x = m + m^\perp$. Dann ist aber

$$\langle m^\perp, m^\perp \rangle = \langle m^\perp, x - m \rangle = 0$$

und daher $x = m \in M$. $\square$

Korollar 11.14. *Hilberträume sind reflexiv (siehe Definition 7.12).*

Beweis. Ist $\lambda \in H''$, so definiert die Komposition

$$\varphi : H \xrightarrow{\Phi} H' \xrightarrow{\lambda} K$$

eine antilineare stetige Abbildung. Nach Satz 11.12 gibt es einen Vektor $y \in H$ mit

$$\overline{\lambda(\Phi(x))} = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x \in H.$$

Dann folgt für alle $u \in H'$

$$\lambda(u) = \lambda(\Phi(\Phi^{-1}(u))) = \langle y, \Phi^{-1}(u) \rangle = u(y).$$

Also liegt $\lambda = j(y) \in \text{Im } j$ im Bild der kanonischen Isometrie $j : H \rightarrow H''$. $\square$

Lemma 11.15. (Pythagoras) Für $x, y \in H$ mit $x \perp y$ gilt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Allgemeiner gilt für paarweise orthogonale Vektoren $x_1, \dots, x_n \in H$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Beweis. Ist $x_i \perp x_j$ für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$, so folgt

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle$$

durch Ausmultiplizieren. □

Wir benötigen einige Resultate über summierbare Familien in Hilberträumen oder Banachräumen. Sei E im Folgenden ein Banachraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 11.16. Sei $(x_j)_{j \in J}$ eine beliebige Familie von Elementen in E und sei $x \in E$. Man nennt $(x_j)_{j \in J}$ *summierbar zu x* (und schreibt abkürzend dafür $\sum_{j \in J} x_j = x$), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $J_0 \subset J$ gibt so, dass

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j - x \right\| < \epsilon$$

ist für alle endlichen Mengen $K \subset J$ mit $J_0 \subset K$.

Bemerkung 11.17. (a) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K (oder in K^N für $N \in \mathbb{N}^*$). Man kann zeigen, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar ist zu einem Element z genau dann, wenn $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ist und die Reihe absolut konvergiert. Dies folgt aus dem nachfolgenden Satz 11.18 zusammen mit Theorem 10.1 in [?]. In unendlich dimensionalen Banachräumen E kann man aus der Summierbarkeit einer Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E nicht mehr auf die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ schließen.

(b) Eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ in E ist summierbar zu $x \in E$ genau dann, wenn das Netz $(\sum_{j \in K} x_j)_{K \subset J \text{ endlich}}$ gegen x konvergiert.

(c) Sind $(x_j)_{j \in J}$, $(y_j)_{j \in J}$ in E summierbar zu x bzw. y , so gilt für $\alpha \in K$ und jede stetig lineare Abbildung $T \in L(E, F)$ von E in einen anderen Banachraum F , dass

$$\sum_{j \in J} (x_j + y_j) = x + y, \quad \sum_{j \in J} (\alpha x_j) = \alpha x, \quad \sum_{j \in J} T x_j = T x.$$

Für die Gültigkeit der letzten Identität genügt es, dass $T : E \rightarrow F$ stetig ist und dass $T(x + y) = T x + T y$ für alle $x, y \in E$ gilt.

Satz 11.18. (Cauchy-Bedingung) Eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ in E ist summierbar genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $J_0 = J_0(\epsilon) \subset J$ existiert mit

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\| < \epsilon$$

für alle endlichen Mengen $K \subset J \setminus J_0$.

Beweis. Sei $(x_j)_{j \in J}$ summierbar zu x und sei $\epsilon > 0$. Wähle dazu eine endliche Menge $J_0 \subset J$ wie in Definition 11.16. Dann gilt für alle endlichen Mengen $K \subset J \setminus J_0$

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\| \leq \left\| \left(\sum_{j \in K \cup J_0} x_j \right) - x \right\| + \left\| x - \sum_{j \in J_0} x_j \right\| < 2\epsilon.$$

Sei jetzt umgekehrt $(x_j)_{j \in J}$ eine Familie in E , die die im Satz beschriebene Cauchy-Bedingung erfüllt.

Für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ gibt es dann eine endliche Menge $J_k \subset J$

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\| < \frac{1}{k} \text{ für alle endlichen Mengen } K \subset J \setminus J_k.$$

Ohne Einschränkung darf man zusätzlich annehmen, dass $J_k \subset J_{k+1}$ für alle $k \geq 1$ gilt. Wegen

$$\left\| \sum_{j \in J_q} x_j - \sum_{j \in J_p} x_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J_q \setminus J_p} x_j \right\| < \frac{1}{p} \text{ für } q \geq p \geq 1$$

existiert der Grenzwert $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_k} x_j$, und es ist

$$\left\| x - \sum_{j \in J_p} x_j \right\| \leq \frac{1}{p} \text{ für } p \geq 1.$$

Ist $\epsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{2}{k_0} < \epsilon$, so gilt für alle $K \supset J_{k_0}$

$$\left\| x - \sum_{j \in K} x_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j \in J_{k_0}} x_j \right\| + \left\| \sum_{j \in K \setminus J_{k_0}} x_j \right\| < \frac{2}{k_0} < \epsilon.$$

Also ist $(x_j)_{j \in J}$ summierbar zu x . □

Man nennt eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ in E *absolut summierbar*, wenn die Familie $(\|x_j\|)_{j \in J}$ in $\mathbb{R}$ summierbar ist. Wir schreiben abkürzend hierfür $\sum_{j \in J} \|x_j\| < \infty$.

Korollar 11.19. Ist $(x_j)_{j \in J}$ eine absolut summierbare Familie in dem Banachraum E , dann ist $(x_j)_{j \in J}$ summierbar in E .

Beweis. Es genügt zu beachten, dass die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums für $(\|x_j\|)_{j \in J}$ die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums für $(x_j)_{j \in J}$ impliziert. □

Bemerkung 11.20. Eine Familie $(t_j)_{j \in J}$ von Zahlen $t_j \in [0, \infty)$ ist summierbar in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn das Supremum

$$s = \sup \left\{ \sum_{j \in K} t_j; K \subset J \text{ endlich} \right\} < \infty$$

ist. In diesem Fall gilt $s = \sum_{j \in J} t_j$.

Beweis. Sei $t = \sum_{j \in J} t_j$. Dann gibt es eine endliche Menge $J_0 \subset J$ mit

$$\sum_{j \in K} t_j \in]t - 1, t + 1[$$

für alle endlichen $K \supset J_0$. Dann ist aber

$$\sum_{j \in K} t_j \leq \sum_{j \in K \cup J_0} t_j < t + 1$$

für alle endlichen Mengen $K \subset J$.

Sei umgekehrt das Supremum s aller endlichen Teilsommen von $(t_j)_{j \in J}$ endlich und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine endliche Menge $J_0 \subset J$ mit

$$\sum_{j \in J_0} t_j > s - \epsilon.$$

Für jede endliche Menge $K \supset J_0$ ist dann

$$s - \epsilon < \sum_{j \in K} t_j \leq s.$$

Also ist $(t_j)_{j \in J}$ summierbar zu s . □

Sei H im Folgenden wieder ein Hilbertraum. Man nennt eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ *orthogonal*, falls $x_j \perp x_k$ ist für alle $j, k \in J$ mit $j \neq k$.

Satz 11.21. Eine orthogonale Familie $(x_j)_{j \in J}$ in H ist summierbar genau dann, wenn $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < \infty$ ist. In diesem Fall gilt

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2.$$

Beweis. Nach dem Satz von Pythagoras (Lemma 11.15) gilt für alle endlichen Mengen $K \subset J$

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in K} \|x_j\|^2.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium (Satz 11.18) folgt, dass $(x_j)_{j \in J}$ in H summierbar ist genau dann, wenn $(\|x_j\|^2)_{j \in J}$ in $\mathbb{R}$ summierbar ist. Sei $x = \sum_{j \in J} x_j$. Indem man Bemerkung 11.17(c) anwendet mit $T = \langle \cdot, x \rangle$ und $T = \langle x_j, \cdot \rangle$, erhält man

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{j \in J} x_j, x \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, x \rangle = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in J} \langle x_j, x_k \rangle \right) = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2.$$

Damit ist die behauptete Äquivalenz und der Zusatz bewiesen. □

Definition 11.22. Sei $(x_j)_{j \in J}$ eine Familie in H . Man nennt

- (a) $(x_j)_{j \in J}$ ein *Orthogonalsystem*, wenn $x_j \perp x_k$ ist für alle $j, k \in J$ mit $j \neq k$,
- (b) $(x_j)_{j \in J}$ ein *Orthonormalsystem*, wenn $x_j \perp x_k$ für $j \neq k$ und $\|x_j\| = 1$ für alle $j \in J$ ist,
- (c) $(x_j)_{j \in J}$ ein *vollständiges Orthonormalsystem* oder eine *Orthonormalbasis* von H , wenn $(x_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem ist und $\overline{\text{LH}}\{x_j; j \in J\} = H$ ist.

Entsprechende Bezeichnungen werden wir auch für Teilmengen von H statt für Familien in H verwenden.

Satz 11.23. Sei $(x_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem in H . Dann gilt für alle $x \in H$

- (a) $\sum_{j \in J} |\langle x_j, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung),
- (b) $\left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\langle x_j, x \rangle|^2$.

Beweis. Für alle endlichen Mengen $K \subset J$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle x_j \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2\text{Re} \sum_{j \in K} \langle x_j, x \rangle \langle x, x_j \rangle + \sum_{j \in K} |\langle x_j, x \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j \in K} |\langle x_j, x \rangle|^2. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 11.20 ist $(|\langle x_j, x \rangle|^2)_{j \in J}$ summierbar und nach Satz 11.21 ist auch $(\langle x_j, x \rangle x_j)_{j \in J}$ summierbar. Indem man zweimal Bemerkung 11.17(b) anwendet erhält man, dass

$$\left\| x - \sum_{j \in J} \langle x_j, x \rangle x_j \right\|^2 = \lim_{K \subset J \text{ endlich}} \left\| x - \sum_{j \in K} \langle x_j, x \rangle x_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\langle x_j, x \rangle|^2$$

gilt. □

Satz 11.24. Für ein Orthonormalsystem $(x_j)_{j \in J}$ in H sind äquivalent:

- (i) $(x_j)_{j \in J}$ ist eine Orthonormalbasis von H ,
- (ii) $\{x_j; j \in J\}^\perp = \{0\}$,
- (iii) für jedes $x \in H$ ist $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$,
- (iv) für jedes $x \in H$ ist $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x_j, x \rangle|^2$.

Beweis. Ist $(x_j)_{j \in J}$ eine Orthonormalbasis von H so gilt

$$\{x_j; j \in J\}^\perp = \overline{\text{LH}}\{x_j; j \in J\}^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Um zu sehen, dass (iii) aus (ii) folgt, beachte man, dass für alle $x \in H$ und $i \in J$

$$\left\langle x - \sum_{i \in J} \langle x, x_j \rangle x_j, x_i \right\rangle = \langle x, x_i \rangle - \langle x, x_i \rangle = 0$$

gilt. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus Satz 11.23(b). Da alle Summen in (iii) in $\overline{\text{LH}}\{x_j; j \in J\}$ liegen, folgt (i) aus (iii). $\square$

Satz 11.25. (*Existenz von Orthonormalbasen*)

Jeder Hilbertraum H besitzt eine Orthonormalbasis. Für jede orthonormale Menge $M \subset H$ gibt es eine Orthonormalbasis B von H mit $M \subset B$.

Beweis. Sei $M_0 \subset H$ eine orthonormale Teilmenge. Dann ist

$$\emptyset \neq \mathcal{M} = \{M \subset H; M \text{ orthonormal mit } M_0 \supset M\}$$

eine partiell geordnete Menge bezüglich der Mengeninklusion. Ist $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ eine Kette, so ist $\cup(\mathcal{C}; C \in \mathcal{C})$ eine obere Schranke für $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathcal{M}$ ein maximales Element B . Dann ist B eine Orthonormalbasis von H , denn sonst gäbe es nach Satz 11.24 einen Vektor $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und $x \perp B$ im Widerspruch zur Maximalität von B . $\square$

Lemma 11.26. *Ein Hilbertraum H ist separabel genau dann, wenn er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.*

Beweis. Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $n = \dim_K(H) = \infty$ ist, denn sonst ist H isometrisch isomorph zu K^n versehen mit der euklidischen Norm. Ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H , so ist

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{n=0}^N t_n e_n; t_0, \dots, t_N \in K \text{ mit } \text{Re } t_n, \text{Im } t_n \in \mathbb{Q} \text{ für } n = 0, \dots, N \right\}$$

eine abzählbare dichte Teilmenge von H . Sei umgekehrt $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset H$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Rekursiv kann man eine Teilfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren mit

$$\text{LH}\{x_0, \dots, x_n\} \subset \text{LH}\{y_0, \dots, y_n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem *Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren* aus der Linearen Algebra kann man rekursiv ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n \geq 0}$ konstruieren so, dass

$$\text{LH}\{e_0, \dots, e_n\} = \text{LH}\{y_0, \dots, y_n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Es genügt, $e_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|}$ zu setzen und im Rekursionsschritt

$$e_{n+1} = \frac{y_{n+1} - \sum_{i=0}^n \langle y_{n+1}, e_i \rangle e_i}{\|y_{n+1} - \sum_{i=0}^n \langle y_{n+1}, e_i \rangle e_i\|}$$

zu definieren. Da die abgeschlossene lineare Hülle der Vektoren e_n ($n \in \mathbb{N}$), die dichte Teilmenge $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset H$ enthält, ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H . $\square$

Satz 11.27. Seien H, K Hilberträume mit Orthonormalbasen $(b_i)_{i \in I}$ und $(c_j)_{j \in J}$. Gibt es eine Bijektion $\varphi : I \rightarrow J$, so existiert ein isometrischer Isomorphismus $U : H \rightarrow K$ mit $Ub_i = c_{\varphi(i)}$ für alle $i \in I$.

Beweis. Nach Satz 11.24 hat jedes $x \in H$ eine Darstellung oder Form

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}).$$

Diese Darstellung ist eindeutig, da notwendigerweise $\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$ ist für alle i . Nach Satz 11.21 ist die Abbildung $U : H \rightarrow K$, $U(\sum_{i \in I} \alpha_i b_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i c_{\varphi(i)}$ wohldefiniert und isometrisch. Da das Bild von U dicht ist, ist $UH = \overline{UH} = K$. $\square$

Korollar 11.28. Alle separablen Hilberträume mit $\dim_K(H) = \infty$ sind isometrisch isomorph zu ℓ^2 .

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 11.26 und Satz 11.27. $\square$

Beispiel 11.29. (Fourierreihen) Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ und sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Die Abbildung $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{T}$, $t \rightarrow e^{it}$ ist stetig, also Borel-messbar. Das induzierte Maß

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{T}) \rightarrow [0, 1], \quad \lambda(A) = \frac{m(\varphi^{-1}(A))}{2\pi}$$

auf $\mathbb{T}$ nennt man das *normalisierte Lebesguemaß* auf $\mathbb{T}$. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda)$ ist $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), m)$ und

$$\int_{\mathbb{T}} f d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f \circ \varphi dm.$$

Es ist $C(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda)$ und $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$, denn es gilt

$$\begin{aligned} \langle z^n, z^m \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} z^n \bar{z}^m d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m} \end{aligned}$$

für alle $n, m \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen, dass $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$ ist. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (§2) ist die Teilalgebra

$$\text{LH}\{z^n; n \in \mathbb{Z}\} \subset C(\mathbb{T})$$

dicht bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$. Da $C(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ dicht ist (Proposition 7.4.2 in [?]), ist $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$. Für $f \in L^2(\mathbb{T})$ und $n \in \mathbb{Z}$ nennt man

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} dm(t) = \langle f, z^n \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

den n -ten *Fourierkoeffizienten* von f . Nach Satz 11.24 konvergiert die Reihe

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, z^n \rangle z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n \quad (\text{Fourierentwicklung})$$

für jedes $f \in L^2(\mathbb{T})$ in dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{T})$ und

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$